课后作业一

不考推导，只要学会查表使用傅立叶变换对即可。

课后作业二

利用拉东变换，证明：

1、三角形函数$tri(x)$的傅里叶变换是$sinc^2(x)$函数。(从二维矩形门函数的傅里叶变换出发)

解：

对于一个空域二维矩形门函数$rect(x,y)=rect(x)rect(y)$

沿着与 x 轴呈 45 度角的方向对它进行积分，可以获得一个一维三角形函数（记得作图分析，画出一个横向宽度为$\sqrt{2}$并且函数最大值为$\sqrt{2}$的一个一维三角形函数，注意标准的一维三角形函数$tri(x)$的横向宽度为 2 并且函数最大值为 1）

$p(x)=\sqrt{2}tri\left(\sqrt{2}x\right)$

又因为，二维矩形门函数的傅立叶变换频谱为

$\mathcal{F}\left\{rect(x,y)\right\}=sinc(\xi,\eta)=sinc(\xi)sinc(\eta)$

沿着与 y 轴呈 45 度角的方向对这个二维频谱做一维切片，令一维频谱切片上的坐标为γ，并且有$\gamma=\sqrt{2}\xi=\sqrt{2}\eta$，即$\gamma/\sqrt{2}=\xi=\eta$，由此可得一维频谱切片的函数为

$$q(\gamma)=sinc\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\right)sinc\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\right)=sinc^2\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\right)$$

根据拉东变换的定义可知，二维函数的一维投影的傅里叶变换是二维函数的傅立叶变换频谱中垂直于投影方向的一个一维切片。因此，可得$\mathcal{F}\left\{p(x)\right\}=q(\gamma)$

即

$$\mathcal{F}\left\{\sqrt{2}tri\left(\sqrt{2}x\right)\right\}=sinc^2\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\right)$$

根据傅立叶变换的空频域缩放性质，可得

$$\mathcal{F}\left\{tri(x)\right\}=sinc^2(\gamma)$$

2、二维高斯函数的傅里叶变换还是二维高斯函数。

解：

对于一个空域二维高斯函数 $gaus(x,y)=gaus(x)gaus(y)$

沿着 y 轴对它进行积分，有

$$\begin{aligned}p(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} gaus(x,y)dy = gaus(x)\int_{-\infty}^{+\infty} gaus(y)dy \\ &= gaus(x)\end{aligned}$$

即证明了二维高斯函数的一维投影是一个一维高斯函数。

然后，对其做一维傅立叶变换，得到

$$\mathcal{F}\left\{p(x)\right\} = \mathcal{F}\left\{gaus(x)\right\} = gaus(\xi)$$

即证明了二维高斯函数的一维投影的傅立叶变换是还是一个一维高斯函数。

根据拉东变换的定义可知，二维函数的一维投影的傅里叶变换是二维函数的傅立叶变换频谱中垂直于投影方向的一个一维切片。

又因为二维高斯函数是旋转对称的，因此可知二维高斯函数的傅立叶频谱沿着任意一个方向做切片都将获得一个相同的一维高斯函数，因此二维高斯函数的傅里叶变换频谱可以看成是由一维高斯函数旋转一圈所组成的，它还是二维高斯函数。

课后作业三

求出透射式方波光栅的夫琅禾费衍射。

其中光栅狭缝长度为 L，宽度为 d，周期为 a，假设光栅的周期数无穷大，并且有 $L >> d,a$

解：

空域中透射式方波光栅的透过率函数可以表示为

$$\begin{aligned}t(x_1,y_1) &= rect\left(\frac{x_1}{d},\frac{y_1}{L}\right) * \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x_1-an) \\ &= rect\left(\frac{x_1}{d},\frac{y_1}{L}\right) * \frac{1}{a}comb\left(\frac{x_1}{a}\right)\end{aligned}$$

其傅里叶变换为

$$F\left\{u_1(x_1,y_1)\right\} = dLsinc(d\xi, L\eta)comb(a\xi)$$

其中 $\xi = \frac{x_2}{\lambda z_{12}}, \eta = \frac{y_2}{\lambda z_{12}}$

根据夫琅禾费衍射计算公式，观察屏上的光场分布为

$$\begin{aligned}u_2(x_2,y_2) &= \frac{e^{jkz_{12}}}{j\lambda z_{12}}\exp\left\{j\frac{\pi}{\lambda z_{12}}\left(x_2^2+y_2^2\right)\right\}F\left\{u_1(x_1,y_1)\right\} \\ &= \frac{e^{jkz_{12}}}{j\lambda z_{12}}\exp\left\{j\frac{\pi}{\lambda z_{12}}\left(x_2^2+y_2^2\right)\right\}dLsinc\left(\frac{dx_2}{\lambda z_{12}},\frac{ly_2}{\lambda z_{12}}\right)comb\left(\frac{ax_2}{\lambda z_{12}}\right)\end{aligned}$$

观察屏上的光强分布为

$$I_2(x_2, y_2) = |u_2(x_2, y_2)|^2$$
$$= \left(\frac{dL}{\lambda z_{12}}\right)^2 sinc^2\left(\frac{dx_2}{\lambda z_{12}}, \frac{ly_2}{\lambda z_{12}}\right) comb^2\left(\frac{ax_2}{\lambda z_{12}}\right)$$