基于深度测量的三维成像技术

陈 妮[1],左 超[2],Byoungho Lee[1]

(1. 首尔国立大学 电子与计算机工程系,韩国 首尔 08826;
2. 南京理工大学 光谱成像与智能感知江苏省重点实验室,江苏 南京 210094)

摘 要:由于三维(3D)成像技术有着广泛的应用,尤其是在信息和生命科学领域的应用,因此越来越受到人们的关注。这些技术大致可分为两类:基于光线的三维成像技术和基于波前的三维成像技术。传统成像技术存在系统装置复杂和成像质量不尽人意等问题,极大限制了其在相关领域的应用,因此基于深度测量的三维成像技术越来越受到重视。文中概述了基于深度测量的三维成像技术,分别详细描述了基于深度测量三维成像的光线场和光波场的相关技术,给出了光线场和光波场成像技术之间的联系,基于这些描述和分析,给出了基于深度测量三维成像研究领域的研究方向。

关键词:光场; 相位恢复; 三维成像

中图分类号:O438.1 **文献标志码**:A **DOI**:10.3788/IRLA201948.0603013

3D imaging based on depth measurement

Chen Ni[1], Zuo Chao[2], Byoungho Lee[1]

(1. Department of Electrical and Computer Engineering, Seoul National University, Seoul 08826, Korea)
2. Jiangsu Key Laboratory of Spectral Imaging & Intelligent Sense, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

Abstract: Three-dimensional (3D) imaging has attracted more and more interest because of its wide spread applications, especially in information and life science. These techniques can be broadly divided into two types: ray-based and wavefront-based 3D imaging. Issues such as imaging quality and system complexity of these techniques limit the applications significantly, and therefore many investigations are focused on 3D imaging from depth measurements. An overview of 3D imaging from depth measurements was presented, providing a summary of the connection between the ray-based and wavefront-based 3D imaging techniques, and showed the research direction of the depth measurement based 3D imaging research.

Key words: light field; phase retrieval; three-dimensional imaging

收稿日期:2019-01-05; **修订日期**:2019-02-22

基金项目:国家自然科学基金(61705241,61722506,61505081,11574152);上海市自然科学基金(17ZR1433800);
江苏省杰出青年基金(BK20170034);江苏省重点研究开发项目(BE2017162)

作者简介:陈妮(198X-),女,博士,主要从事光学三维成像相关研究。Email:nichen@snu.ac.kr

0 引 言

与传统的二维成像不同，三维成像承载着从现实世界中获取的更多信息，所以具有更加广泛的应用，尤其是在生命科学[1]和信息科学[2]领域，因此近年来越来越受到人们的关注[3-4]。调研了基于深度检测的三维成像技术过去近 30 年发表的论文，逐年增长的论文数量也从正面反映了人们对三维成像技术的关注度在不断提高。

所谓的三维信息，通常是指除了二维图像信息以外，同时还包含物体的深度或形状信息。而物体的三维信息是包含在物体的光波场中。因此，在某些情况下，三维成像可以看作是物光波前的振幅和相位成像，也称为波前成像。波的相位是无法“看见”的，但当其穿透物体或被物体反射时将不可避免地发生变化，从而引入强度图的变化。物体反射光波的情况如图 1 所示，物体的表面形态会改变光线的传播方向。在透射的情况下，物体的折射率会引起波前相位延迟。相位的延迟量可以反映物体的表面拓扑结构[5]或是形状和密度[6]。因此，波前强度图携带了物体的三维信息。如图 1 所示，较亮区域表示光在此汇聚，较暗区域表示光在此扩散。在现实世界中，物体可能会吸收光，导致测得的强度图像同时受到折射和吸收的影响。

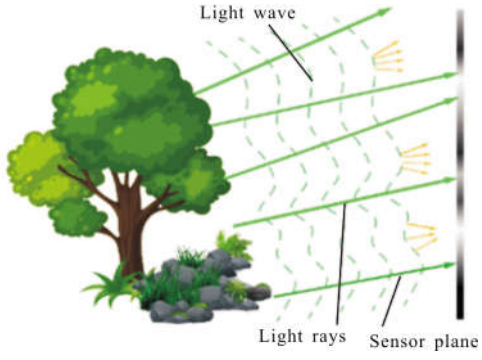

图 1 光线和波前的关系

Fig.1 Relationship between light ray and wavefront

众所周知，光线和光波是光的不同层面的表示，Eikonal 方程给出了几何光学和波动光学之间的联系[7]。波动光学用于描述衍射和干涉不可忽略的情况，而几何光学描述的是可以将光视为光线的情况。事实上，在许多成像分析中，将光当作光线即可解决问题。从几何光学的角度来看，反射光线的传播方向是由入射点处物体表面的法线方向所决定的[8]，如图 1 所示。因此，通过记录物体发出的光线及其方向，便可以重建物体的三维表面形态。而这种利用光线和其传播方向描述的成像技术被称为光场成像[9-10]。为了区别于“光波场”，文中将其命名为“光线场”。基于以上描述，三维成像可以看作是光线场和光波场成像。

三维成像的应用非常广泛。基于波前的三维成像对于物体显微结构的观察[11]和医疗应用都非常的有效。光线场是一种实用的、商业化的立体和自动立体三维显示方法，它是通过视差产生多视角图像[12-13]。得益于三维成像技术，全息技术有时将波前场技术和光线场技术结合起来，可以在非相干光照明下，获得真实三维场景的全息图，使全息三维显示更具可实现性[14-15]。

然而，“光线”和“相位”都不能被直接探测。但近几十年来，受益于计算成像[16]并基于强度图携带了物体三维信息这一事实，三维成像技术得以蓬勃发展[16]。新兴了许多相位成像技术，包括相干衍射成像[17]、相位恢复[18-20]、全息摄影[21-22]、Time of Flight(TOF)[23]和结构光照明技术[24]。同时也发明了许多光线成像技术，例如双目成像[25]和光场成像[9,26](双目成像可以看作是一种极端光场成像)。近年来，考虑到传统成像的成像质量问题和系统复杂性，研究人员基于深度测量的三维成像进行了大量的研究。文中概述了基于深度测量的光场和光波场的三维成像技术。按照从简单概念到深入描述的方式进行了叙述。由于几何光学具有直观性，首先介绍基于光场的技术，然后再介绍基于光波场的技术。在第 1 节中简要介绍了每种类型的理论基础及其技术发展情况。在第 2 和第 3 节中论述了基于深度测量的两种类型的最新技术。事实上，由于光线和光波之间联系紧密，这两种三维成像技术并没有明确的界限。在第 4 节中，将对这类技术进行比较。第 5 节为结论性的论述。

1 三维成像理论及其发展

在该节中，介绍了基于光场的三维成像基本原理，并揭示了基于深度测量的三维成像技术成为研究趋势的原因。

1.1 基于光线的光场成像

如图 2(a)所示，根据全视函数[27]，光场可以用函

数 $L(r,\theta,z)$来表示,其空间位置为(r,z),传播方向为θ,r 是表示空间坐标(x,y)的矢量,$\theta=(\theta_x,\theta_y)$是传播矢量。根据传统光场的拍摄方法,四维(4D)光场函数可以用两个平面来表示[28]。为了方便起见,文中使用前一种方法来表示光场。假设沿光线传播的能量是常数,那么摄像机在垂直于 z_c 光轴的平面上检测到的二维图像可以用光线的角度积分表示。

$$I_i(r,z_c)=\frac{1}{z_c^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{L}(r,\theta,z_c)\mathrm{d}\theta \tag{1}$$

光场可以通过[29]轻易地从一个 z 平面传播到另一个 z'平面。

$$L(r,\theta,z')=L\left(\frac{r}{\alpha}+\theta\left(1-\frac{1}{\alpha}\right),\theta,z\right) \tag{2}$$

式中:$z'=\alpha z$,α 为实数。光场灵活的转换特性使其广泛地应用于深度图像重建[30]与数字重聚焦等三维成像技术中[29,31]。此外,光场也是一种非常有效的裸眼三维显示方法[12-13,32]。

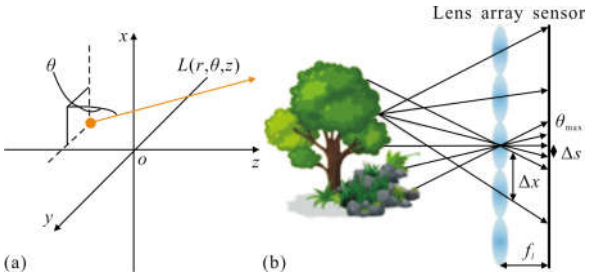

图 2 光场(a)及其常规拍摄(b)

Fig.2 Light field (a) and its conventional capture (b)

近年来,各种光场采集技术得到了迅速的发展,包括摄像机阵列[33-34]、微透镜阵列[29,35]、频域多路复用[35]、振幅掩模[36-37]和精心设计的反光镜[38-39]。在这些技术中,在相机传感器前面放置微透镜阵列的方式[29,40-41]因其单次拍摄的便捷性而得以广泛使用,如图 2(b)所示。在此类拍摄技术中,可以记录的光线数量取决于小透镜尺寸 Δ_x 和相机传感器的像素大小 Δ_s。其中,可采集光线的最大角度 θ_{max} 取决于焦距 f_l 和 Δ_x。物体的空间采样间隔与透镜阵列的间距相同。基于透镜阵列的方法可以直接拍摄光场,但对应的空间分辨率和角度分辨率的质量存在相互制约的问题[12-13]。这种相互制约发生在所有类似的装置中,如摄像机阵列。在过去的 15 年间,人们提出了许多提高空间分辨率、视角和可表达的深度范围的技术[13,42-44]。遗憾的是,这些技术都无法从根本上消除阵列设备的分辨率制约缺陷。

由于测量的深度图携带了物体的三维信息,研究人员开始着眼于从深度测量(而不是使用阵列)中恢复光场。这些技术将在第 2 节中进行论述。

1.2 基于波前的光场成像

基于波前的光场成像主要分为干涉测量法和相位恢复法两类。早期的波前成像是基于波的干涉现象,通常称为全息术,于 1948 年由 Dennis Gabor[21]首次发明。如图 3(a)所示,目标波和已知参考波之间的干涉将目标波相位转换为强度调制,使光学[45-46]和数字[22]重建相位成为可能。

然而,引入参考光束需要使用复杂的干涉实验装置,这极大地限制了全息术的应用,同时也引发了诸如直流(DC)项、孪生像和散斑噪声等一系列问题。解决这些问题通常需要更复杂的实验设备[46-47]。因此,消除干涉测量技术的复杂性和相干限制非常有必要,而使用离焦图像来恢复相位是其中一种常用的有效手段。换句话说,可以使用一幅强度图像或一组离焦强度图像来定量估计相位,即所谓的相位恢复法。得益于计算成像技术的发展[16],相位恢复法可以在简单的系统装置下实现优质的成像效果。如图 3(b)所示,在基于深度测量的相位成像装置中,无透镜成像更加拓宽了相位成像的应用,如 X 光线成像[48]。

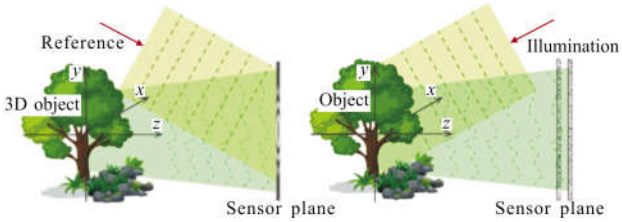

图 3 两种典型的波前成像技术:干涉测量(a)和相位成像(b)

Fig.3 Two typical wavefront imaging techniques: interferometric (a) and phase imaging (b)

相位恢复通常可以通过迭代和定量计算来实现。两者都只需要对衍射波进行一次或若干次深度测量。将在下文第 3 节中论述此类技术。

2 基于深度测量的光场成像

在光场重建中,深度测量通常是在自然光下利用普通的数码相机(DSLR)实现。将在下文中叙述摄影图像的形成与几何光学下光场的密切联系。之后,

将论述它的相关技术。

2.1 通过传统相机进行离焦扫描测量

首先，假设目标是一个中心位于笛卡尔坐标原点的三维物体。则此三维物体可被看作是二维切片的堆栈，即 $O(r,z)=\int O(r;z)$。图 4 和参考文献[49]可以将主平面位于其中心的三维物体的光场表示为物体投影的积分。

$$L(r,\theta,0)=\int O(r+z\theta,z)\mathrm{d}z \tag{3}$$

图 4 显示了三维物体表面与其在 r–z 截面上光场之间的几何关系。

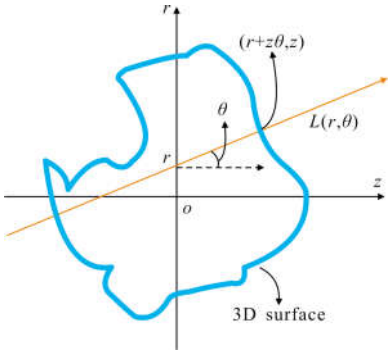

图 4 三维物体的光场表示法

Fig.4 A 3D object′s light field representation

在焦面扫描拍摄系统中，通常只使用一台普通的数码相机，如图 5 所示。拍摄的图像 $I_i(r,z_c)$是物体的像与系统点扩散函数(PSF)之间的卷积[50]。因此 $I_i(r,z_c)$可以表示为：

$$I_i(r,z_c)=\int O(r,z)\otimes h_i(r,z_c-z) \tag{4}$$

式中：$h_i(r,z_c-z)$为非相干成像系统的 PSF；$\otimes$为二维卷积算子。由于相机的孔径通常为圆形，所以其 PSF 约等于三维高斯分布函数，该函数沿光轴在焦平面两侧对称[51-52]。图 5(b)显示了传统相机成像系统中三维 PSF 的几个切片，图 5(c)显了在不同平面上拍摄的几个示例图像。

摄像成像中的早期光场重建算法采用了图像反卷积技术，而这正是公式(4)[53]的逆变过程。然而，在样本数量有限的情况下无法获得良好的结果。随后，为了获得更高分辨率的光场，人们发明了将编码掩模插入相机的技术[17,1]。尽管此类技术比基于透镜阵列的技术有更好的分辨率，但由于掩膜遮挡了大量光所以存在图像强度太弱的问题。此外，他们通常需要物体场景的先验知识来解决计算量很大的逆运算问题。

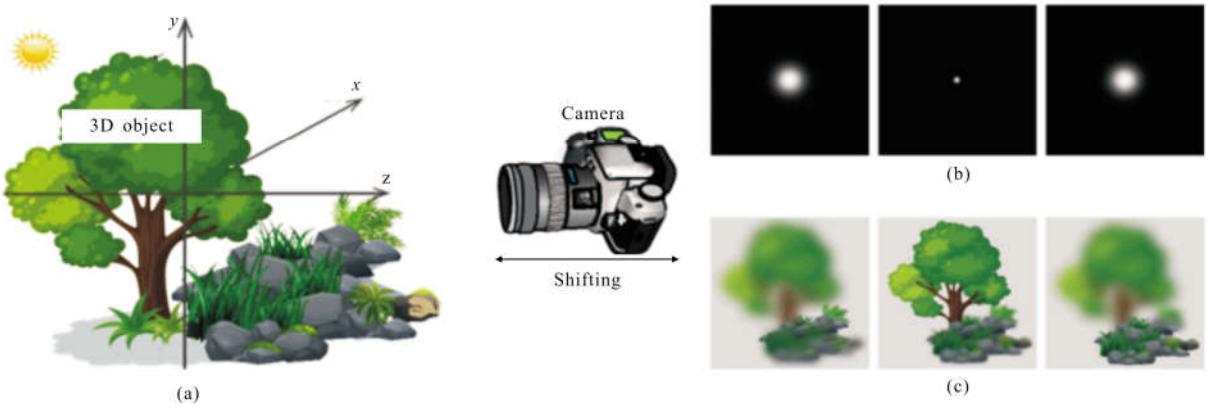

图 5 焦点扫描采集示意图(a)以及点光源(b)和三维场景(c)

Fig.5 Scheme of focal sweeping capture (a) and a sample of the captured images of a point source (b) and a 3D scene (c)

近年来，焦面堆栈成像受到了人们的广泛关注[55]。焦面堆栈是众所周知的工具，用于摄影中扩大景深[56]和荧光层析摄影[57]。更有研究表明可以从多焦面堆栈中重建光场[58-60]。由于三维信息存储在堆栈中，因此可以从焦面堆栈中提取光场是显而易见的，这也可以用数学知识来解释。这是基于公式(1)和(4)所示的光场和摄影图像之间的可互换性，同时也是大多数基于深度测量的光场重建技术的基础。在这种技术中，不需要在相机上安装或插入任何额外的光学元件就可以拍摄光场。

为了实现焦平面移动拍摄，可以将摄像机或物体沿光轴平移[59]，旋转摄像机的焦环[26]，或者通过光学元件[61-63]调节系统 PSF。摄像机的移动可以通过数字控制[49,63]或机械控制[26,59]。因为图像没有被透镜阵

列的子透镜分割，重建得到的光场具有与传感器相当的分辨率。

在下文的章节中对这些技术进行了论述，尤其是反向投影光场重建(LFBP)[59-60]和光场矩成像(LFMI)[26,64]。

2.2 光场的反投影重建

由于光场与二维摄影图像之间存在互换关系，可以直接用反向投影法从深度测量的图像中重建光场。假设 $I_i(r,z_q)$是在 $z=z_q$ 拍摄的图像，m 是图像堆栈中的索引号。拍摄的图像总数以 Q 表示。使用反向投影算法计算主平面位于 $z=0$ 的光场的表达式为[59]：

$$L(r,\theta,0)=\frac{1}{Q}\sum_{q=1}^{Q} I_i(r+z_q\theta,z_q) \tag{5}$$

将直接用这个方程重建光场的方法命名为 LFBP I。公式(5)可以更直观地用图 6 解释。在图 6(a)中，传播方向为 θ 的光线 $L(r,\theta,0)$在前后几个散焦图像中处于不同位置，即左边图像中的 r_1 和右边图像中的 r_2。特定面具有特定传播方向的光线的位置可以通过 $r_q=r+z_q$ 获取。基于这一事实，可以通过取得沿光线方向所有深度图像上对应像素的平均值来获得此光线的亮度。图 6(b)显示了对应的极平面图(EPI)。空间中的焦平面扫描对应 EPI 的扭转，扭转度反映焦平面扫描距离[59]，这与 Wigner 分布函数(WDF)[65]的性质相似。因此，可以通过对三张 EPI 图像中的所有红点进行叠加来获得光线的强度。图6(c)显示了 LFBP I 技术的一个示例，其中左图是待测的三维目标，右上图是所拍摄的图像，而右下图是重建光场的 EPI。需要注意的是，从摄影图像中计算出的光场的角度采样取决于相机数字孔径(NA)和相机传感器的像素间距，而不是沿光轴拍摄的图像数量。

如图 6(c)所示，采用该方法重建的光场存在严

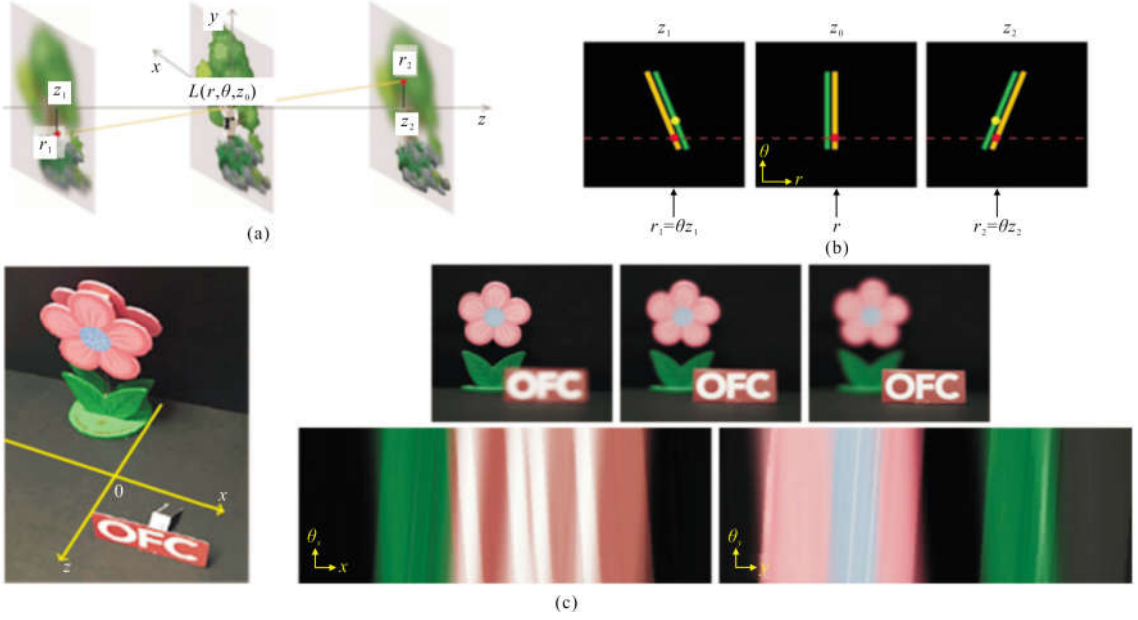

图 6 用空间域(a)和维格纳分布函数(WDF)(b)表示的 LFBP 原理，以及真实三维场景的重建 EPI(c)(经美国光学学会[66]许可)

Fig.6 Principle of light field reconstruction with back projection (LFBP) represented in the spatial domain (a) and by Wigner distribution function (WDF) (b), and an example of the reconstructed epipolar plane images (EPIs) of a real 3D scene (c), adapted with permission from[66], Optical Society of America)

重的噪声问题[59,63,1]。当三维场景比较复杂时，这种现象更为严重。为了定量分析这种噪声，Chen 等人给出了基于深度测量的 LFBP 的精确表达式[49]：

$$L'(r,\theta)=\sum_{q=1}^{Q} O(r+z_q\theta,z_q)+\sum_{q=1}^{Q}\int_{z\neq z_q} O(r+z_q\theta,z)\otimes h_i(r+z_q\theta,z_q-z)\mathrm{d}z \tag{6}$$

由于三维物体 $O(r,z)$可以表示为 $O(r,z)\approx\sum_{n=1}^{N} O(r,z_n,N$ 是切片数)，公式(3)可以改写为 $L(r,\theta)=\sum_{n=1}^{N} O(r+z_n,z_n)$。因此，当公式(6)中的 Q 接近 N 时，第一项接近公式(3)，对应于三维物体光场的离散近似。当 Q 远远小于 N 时，相当于对物体轴向采样不足，会影响重建光场的深度分辨率。公式 (6) 的第二项是噪声。显然，噪声的产生是由于离焦切片图像引起的散焦的累积。从这个方程可以看出，影响噪声的主要参

数有两个:深度图像的数量和相机的 PSF。PSF 与相机的焦比有关,即 NA。如公式(6)的第二项所示,较小的 NA 和较少的图像产生更高质量的光场。然而,为了保持重建光场的深度分辨率,拍摄的图像数量应该足够大。这种相互约束的性质使传统的 LFBP 技术难以获得高质量的光场[59],如图 7(a)所示,图 7(a)显示了重建光场的 EPI 与深度测量的数量的对应关系,图 7(c)分别显示了重建效果和不同相机 NA 的关系。随着逐渐增多的测量值和摄像机 NA,EPI 的噪声越来越严重。在图 7(a)中,当测量次数足够大时,会淹没有用信号,此现象从图 7(a)最右侧的图像中可以看到。图 7(c)显示,使用 NA 非常小的相机无法重建正确的 EPI,而大 NA 相机也会淹没信号。

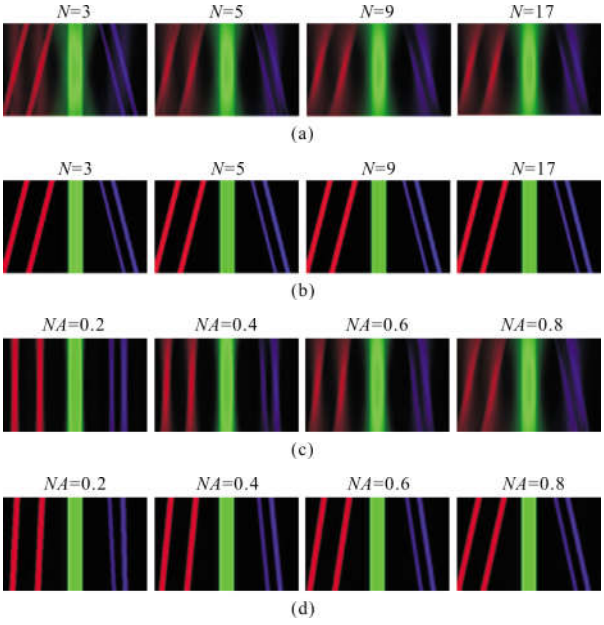

图 7 (a),(b) 根据不同深度处采集到的图像重构获得的 EPIs;(c),(d) 在不同相机数值孔径(NA)下采集到的 5 个深度图像重构获得的 EPIs;(a),(c) 采用的是传统 LFBP I 方法;(b),(d) 采用去噪 LFBPII 方法(经美国光学学会[51]许可改编)

Fig.7 (a),(b) Reconstructed EPIs calculated from various number of depth images; (c), (d) five depth images captured under various camera numerical apertures (NA); (a), (c) by the conventional LFBP I; (b), (d) denoised LFBP II from[51] (Optical Society of America)

基于以下事实:(1) 三维物体上的每个点只聚焦在深度图像中的一个平面上;(2) 深度图像的最大变化量表示最清晰的图像位置,散焦噪声可以通过预处理消除[49]。如图 7(b)、(d)所示,重建的光场质量有了很大的提高。拍摄的图像和相机的数量对重建没有影响。同样,采用更为复杂的深度图计算算法和连续分层 EPI 计算可以实现更逼真的光场重建[60,1]。这种方法类似于先重构三维模型后用公式(3)投影。因此,此方法非常依赖于深度图计算算法。将上述改进的 LFBP 技术命名为 LFBP II[49,60]。

2.3 基于反投影的迭代光场重建

为了获得更真实、质量更高的光场重建,研究人员提出了迭代 iLFBP 技术[66-67]。这些技术也是基于二维图像和光场之间的可互换性,由公式(1)和(5)表示。Yin 等人和 Liu 等人提出了迭代光场重建技术[66-67]。二者的方法概念相同。在 iLFBP 中,二维堆栈图像和光场之间存在交替投影。对每次投影,将用相机的 NA 进行约束。这类似于将在第 3.1 节中介绍的著名迭代相位恢复算法。如图 8 所示,上述方法可以充分利用焦面堆栈的结构信息。

由于这种方法不像 LFBP II 依赖于预处理或复杂的非线性深度估计过程,因此其不受深度估计精度的影响。实验表明,这些技术在精度、采样不足和边界封闭等方面具有优势。然而,这些技术也与所有其他迭代技术一样非常耗时。

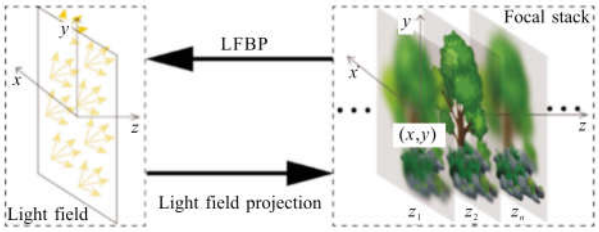

图 8 基于迭代反投影光场(iLFBP)的重建方案

Fig.8 Scheme of iterative light ray field reconstruction based on back-projection (iLFBP)

2.4 光场矩成像

正如文中所述,物体三维信息存在于图像堆栈中。虽然 LFBP I 和 LFBP II 可以重建光场,但深度分辨率依赖于深度测量时的轴向采样率。虽然 iLFBP 表明较少图像也可以重建光场,但其仍然需要相当多的图像。

Orth 和 Crozier[26]发现光线的角矩符合泊松方程:

$$\frac{\partial I_l(r,z)}{\partial z}=-\nabla_{\perp}\cdot\nabla U(r,z) \tag{7}$$

式中：∇U 为强度与光线在(r,z)位置的一阶角动量矩 $M(r)$的乘积。成功求解此方程的决定因素是在获得两个[26]或更多[64,68]图像的强度微分。三维透视图可以通过求解的角矩重建[26]。

$$L(r,\theta,z)=I_i(r,z)\exp\left\{-\frac{[\theta-M(r)]^2}{\sigma^2}\right\}= I_i(r,z)\delta[\theta-M(r)]\otimes G(\theta,\sigma) \quad (8)$$

由于光线的角矩满足高斯分布[26]，式中，$G(\theta,\sigma)$表示标准差为 σ 的高斯函数，等同于系统的 NA。当拍摄中使用的相机具有不同的孔径形状时，可以适当地修改此函数。

图 9 可以更直观地解释 LFMI 理论。如图 9(a)所示，估算的角动量矩代表每个空间位置处的平均光线传播方向，因此可以表示为 1D EPI 曲线上的点，如图 9(b)中的左图所示，对应于公式(8)中的 $I_i(r_n)\delta[-M(r_n)]$。最终计算的 EPI(图 9(b)中的右图)是

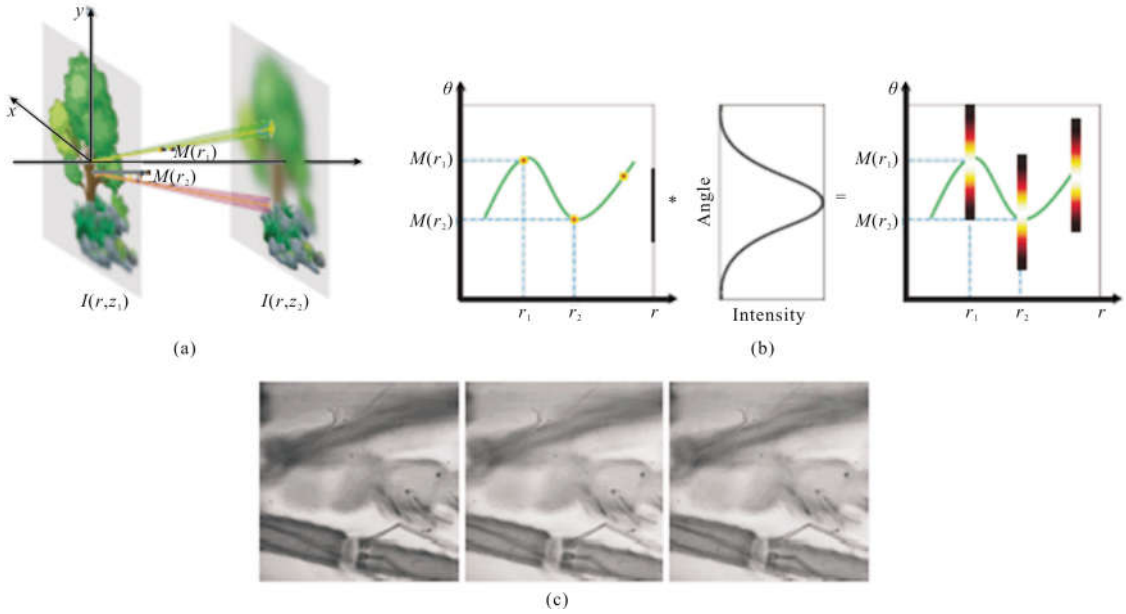

图 9 在空间域(a)和 WDF(b)中表示的光场矩成像原理(LFMI)，以及由其重建的不同视场图像(c)

Fig.9 Principle of light field moment imaging (LFMI) represented in the spatial domain (a) and WDF (b), and one example of different view images reconstructed by it (c)

角矩和高斯 PSF(图 9(b)中的中间图)之间的卷积。由此可见，最终的 EPI 主要由角矩决定，所以其精度对重构光场影响最大。

LFMI 成像在波动光学领域有一个对应成像方式——光强传输方程(TIE)，这是一个非常有效的非干涉相位恢复工具[69]。LFMI 的关键步骤是通过求解与 TIE 相似的泊松方程来获得一阶角动量矩[26]。因此，相邻测量平面之间的轴向间距至关重要[70-71]，应根据物体的特性仔细选择该轴向间距，以获得对强度导数的良好估计[26]。多幅图像可以进一步提高估计精度[64,68]，这个问题将在第 3.2.3 节中进行详细讨论。

还需要指出的是，虽然 LFMI 为从深度测量重建光场提供了一个新的概念，但其不能重建一个准确的光场，仅可以重建看上去有透视效果的图像。不过其为基于深度测量的光场重建提供了一种新的视角，在一定程度上适用于观看小物体的三维形状。关于 LFMI 和 TIE 之间关系的更详细讨论见 4.2 节。

3 基于波前深度测量的光场成像

基于相位恢复的波前重建技术不需要任何参考光束。一般来说，此类技术需要一个或多个衍射强度图像和一些后数字图像处理。这些技术通常通过迭代[72]或直接法[73]来实现。迭代相位恢复技术通常是基于 Gerchberg-Saxton(GS)方法[74]，而直接法通常是指 TIE[69,73,75-76]。文中将依次论述这两种类型的相位恢复法。

3.1 迭代相位恢复

几乎所有的迭代相位恢复技术都基于 GS[74]和 YG[77]算法，这些算法使用物体的先验知识作为约束条件[18]。在 GS 算法中，迭代在聚焦图像和傅里叶域之间进行。如图 10(a)所示，P 和 P^{-1} 是一对光波传播算符。在每个步骤中，复振幅场的估计是根据测量得

到的图像信息或者先验信息来更新的[18,78-79]。在这种情况下,相位恢复法的准确性有待进一步确定。通过这些技术获得的相位不是唯一的，但这些相位结果基本是正确[80]。此外,迭代的停滞和局部极小值也限制了该方法的应用。自该技术发明以来,人们提出了许多减少解的误差的技术[81-82]。

菲涅耳变换图像也可以代替傅里叶变换图像[83],也就是说 P 和 P^{-1} 可以是傅里叶变换也可以是菲涅耳变换。与傅里叶变换不同的是物体与测量平面之间是菲涅耳变换关系。这使迭代不仅局限于物面和像面之间,还可以是在多副衍射光强图之间。物体和测量值之间的迭代可以有多种组合,如图 10(b)所示。通过 $P_1\rightarrow P_2\cdots P_m\rightarrow P_m^{-1}\cdots\rightarrow P_2^{-1}\rightarrow P_1^{-1}$,的迭代路径,可以在一个循环中对所有面执行迭代，或者让迭代只在目标平面和每个像面之间进行，如按 $P_1\rightarrow P_1^{-1}\rightarrow P_2\rightarrow P_2^{-1}\cdots P_m\rightarrow P_m^{-1}$ 路径顺序迭代,当然迭代也可以只在像面进行。因此,待测物体的先验知识就变得不那么重要了。多次测量提高了相位恢复的精度，避免了对物体先验知识的需求,使迭代相位恢复法的应用更加广泛[84-86]。

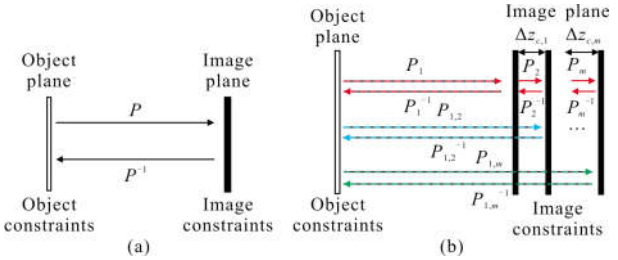

图 10 (a)单个和(b)多个深度测量的迭代相位恢复法

Fig.10 Iterative phase retrieval with (a) single and (b) multiple depth measurements

数十年来,人们对迭代算法、散焦测量、照明调制和多次测量进行了深入的研究。Fienup 先后提出了梯度下降搜索(GDS)算法和 HIO 算法[18],其中 HIO 被证明非常有效,并得到了广泛的应用[87-88]。

除了改进算法,研究人员还研究了约束条件。研究表明,相位重建的精度受实测图像离焦量的影响[89,83],而离焦量与物体特性相关。大的传播距离通常会产生更好的衍射对比度，从而使这些技术更好地用于 X 光成像[90-91]。把已知的光照作为约束以消除对先验知识的需求[85]。随机振幅掩模[92]或随机相位板[93-94]技术只需要较少的迭代就能进行重建，因为物体的低频经调制变为快速变化的高频。然而,振幅掩模会导致光能量的衰减,而相位板的制造难度又比较大。

多次测量也可以在一定程度上改善对物体约束条件的需求。由于多次深度测量可以探测具有不同灵敏度的空间频率信息[84,95-98],因此也可以提高重构分辨率。多深度测量可以通过在同一位置在不同波长照射下捕获强度图像[99],或者在同一光照下移动物体或相机进行不同深度测量[84]。对于重构分辨率,多次测量包含合成孔径(SA)、叠层成像技术[100-101]和结构光照明[102]。

多次测量所获取的大量数据,使相位恢复法更具鲁棒性[48]。测量越多,重建的质量越高[103]。然而,拍摄更多的图像需要更多的相机或物体移动，这使拍摄到的图像对微小的误差很敏感。此外,拍摄过程的大量耗时使其无法满足动态或实时的应用需求。为了提高多次测量的速度[97],研究人员使用诸如分光镜[48]、SLM[104-105]和 DMD[106]等设备来实现单次/单平面测量。然而,分光镜会导致光衰减,而 SLM 或 DMD 的使用牺牲了实验装置的简单性。所有这些方法都需要额外的光学元件,并且涉及了复杂的后数字处理。表 1 总结了典型的迭代相位恢复技术。尽管每种方

表 1 迭代相位恢复技术的比较

Tab.1 Comparisom of iterative phase retrieval techniques

	Techniques	Pros	Cons
Algorithm	GS	2 images	Error stagnation local minima
	GDS	Moderate fast	Low
	HIO	Effective	
Contraints	Amplitude mask Phase mask Known pattern	Fewer iteration Fewer iteration Fewer iteration	Attenuation Fabrication
	Multi-depth	Resolution Single position/ shot possible	Time cost Possible experimental complexity
	Multi-wavelength	Resolution Single position	Time cost Expensive
	Multi-angular	Resolution	Experimental complexity
	Structure illumination	Resolution	Experimental complexity
	Synthetic aperture	Resolution	Experimental complexity

法都有局限性,但由于其实现简单,迭代相位恢复仍然是波前重建的一种常用方法。然而,基于标量衍射理论[50]的迭代相位恢复只能在相干照明下工作,大大限制了其应用。TIE 被证明(见 4.3 节)是对迭代相位恢复技术的有效补偿。

3.2 光强传输方程

另一种重要的非干涉单光束相位恢复方法被称为 TIE。其最初是 30 多年前由 Teague[20]根据傍轴近似下的亥姆霍兹方程推导而来,当时主要应用领域是自适应光学[106]、透射电子显微镜(TEM)[107]、X 光成像[108]和中子光成像[109]。近年来,随着光学显微镜和数字信号处理技术的进步 TIE 重新回归定量相位显微镜[110-114]和三维深度成像[26,61,115]的前沿。TIE 给出了物体平面相位与近菲涅耳区域光强对光轴的一阶导数之间的关系,可以直接恢复相位信息[20]:

$$-k\frac{\partial I(r)}{\partial z}=\nabla\cdot[I(r)\nabla\phi(r)] \tag{9}$$

式中:k 为波数 $2\pi/\lambda$;r 为横向位置坐标(x,y);∇ 为作用于 r 平面的哈密顿算符。$I(r)$为光强分布,不失一般性,认为 $I(r)$位于 $z=0$ 的平面处,$\phi(r)$为需要恢复的相位。展开公式(9)的右侧可以得到:

$$-k\frac{\partial I(r)}{\partial z}=\nabla I(r)\cdot\nabla\phi(r)+I(r)\nabla^2\phi(r) \tag{10}$$

在以上表达式中,右侧的第一项称为棱镜项,表示由于局部波前斜率而引起的强度平移。右侧的第二项称为透镜项,表示由局部波前曲率引起的强度的会聚与发散。可以看出,TIE 将光强的轴向微分与波前的斜率和曲率联系起来,导出了波前传播时的光强变化。

3.2.1 光强传输方程的求解

光强传输方程是一个关于相位的二阶椭圆型偏微分方程,求解该方程看似并不困难。假设在闭区间 $\bar{\Omega}$内 $I(r)>0$,在适当的边界条件下(定义在区域边界 $\partial\Omega$ 上),TIE 的解存在且唯一(或除任意加性常数外唯一)[75],例如,通过光强 $I(r)$与光强轴向微分$\partial I/\partial z$,可以唯一地确定相位 $\phi(r)$。通常,求解 TIE 需要借助于“Teague 假设”,即认为横向能流场 $I\nabla\phi$ 是保守的,并且可以完全用标量势能 ψ(辅助函数)来表示:

$$\nabla\psi=I\nabla\phi \tag{11}$$

然后,可以将 TIE 转换为以下两个泊松方程:

$$-k\frac{\partial I}{\partial z}=\nabla^2\psi \tag{12}$$

和

$$\nabla\cdot(I^{-1}\nabla\psi)=\nabla^2\phi \tag{13}$$

求解这两个泊松方程数学上很简单,研究人员也提出了多种求解方法,如格林函数法[20,116]、多重网格法[117-118]、泽尼克多项式展开法[119-120]、快速傅里叶变换(FFT)法[76,117,120-121]、离散余弦变换(DCT)法[122-123]和迭代 DCT 方法[124]。

尽管在数学上 TIE 有很多种解法,但由于相关的边界条件难以获得,因此严格地实现 TIE 相位恢复往往是困难的。图 11 显示了 TIE 解法中使用的三个典型边界条件:Dirichlet 边界条件、Neumann 边界条件和周期性边界条件。由于相位函数正是要测量的对象,一般而言,进行任何测量之前,无法预先知

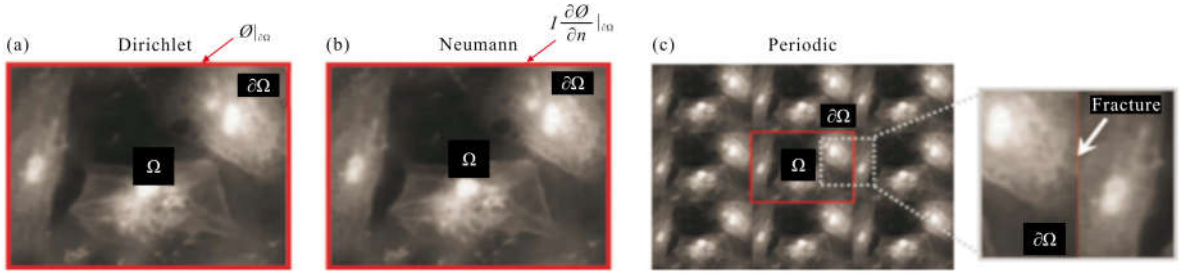

图 11 TIE 求解算法中使用的三个典型边界条件:(a) Dirichlet 边界条件(需要知道边界处的相位值);(b) Neumann 边界条件(需要知道边界处的相位法向导数);(c) 周期性边界条件(假设物体在边界处周期性地延伸)

Fig.11 Three typical boundary conditions used in TIE solvers: (a) Dirichlet boundary conditions (need to know the phase value at the boundary); (b) Neumann boundary conditions (need to know the phase normal derivative at the boundary); and (c) periodic boundary conditions(assume the object is periodically extended at the boundary)

道其在区域边缘上的分布 $\phi|_{\partial\Omega}$(Dirichlet 边界条件)或法向导数 $I\partial\phi/\partial n|_{\partial\Omega}$(Neumann 边界条件)。为了克服这一难题,许多研究人员尝试直接求解 TIE,而不借助于任何边界信号的测量[120,125-127]。它们的共性在于寻找一些方法来抵消整个区域边界的能量转移,从而消去边界条件项的作用。

$$\iint_{\Omega}\frac{\partial I(r)}{\partial n}\mathrm{d}r=0 \tag{14}$$

满足这一条件的一个简单而普遍的做法是将待测量物体“孤立”地放置在相机的视场(FOV)的中心,且物体由一个理想的平面波照射(这样可以认为区域边界的相位是“平的”),在这种情况下,视场内部自动满足能量(强度)守恒,如图 11(a)所示。实际上这里可以定义一些简化的边界条件,例如,齐次 Dirichlet 边界条件(相位在区域边界为常量 $\phi|_{\partial\Omega}=C$,其中 C 是常数)、齐次 Neumann 边界条件($I\partial\phi/\partial n|_{\partial\Omega}=0$)或周期性边界条件(相位在区域边界处是周期循环的,这主要针对矩形区域)。在这种情况下,最流行的基于 FFT 的 TIE 求解算法实际上非常有效[76,117,120-121,127],这是因为离散傅里叶变换的循环性质使其包含了周期性边界条件。然而,上述情况是相当有限的,并不能反映一般的实验条件。当实际实验条件违反了这些强加的假设时,如波前传感(边界处非平坦相位)或物体扩展到图像边界外时会出现严重的边界误差,严重影响相位重建的精度[125-127],如图 12(b)所示。

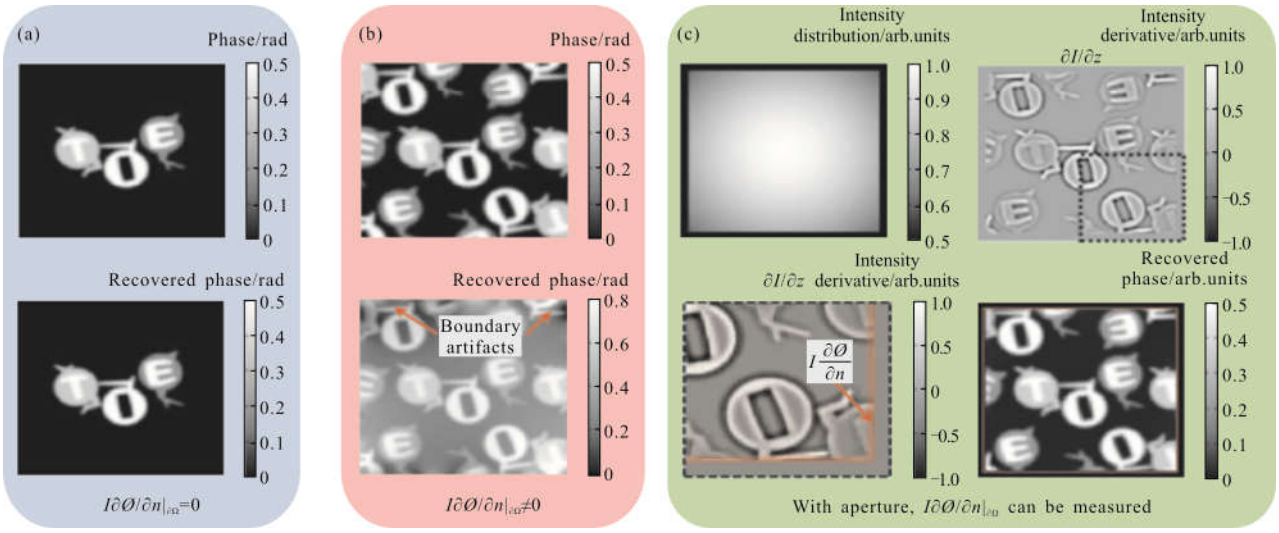

图 12 针对不同类型物体的相位恢复仿真:(a)位于中心视场(FOV)的孤立物体(基于 FFT 的求解算法提供精确的重构);(b)延伸到图像边界之外的复杂物体(基于 FFT 的求解算法产生较大的边界误差);(c)基于硬边界光阑的 DCT 求解算法(在边界上可以测量出非均匀边界条件,即使物体位于光阑边界上,也能得到精确的相位重构)

Fig.12 Phase retrieval simulations for different types of objects: (a) an isolated object located in the central field of view (FOV) (FFT-based solver gives accurate reconstruction); (b) a complex object extending outside the image boundary (FFT-based solver produces large boundary artifacts); and (c) DCT solver with a hard aperture (the inhomogeneous boundary conditions can be measured at the boundary, which produces accurate phase reconstruction even if the object is located at the aperture boundary)

为了克服获得真实边界条件的困难,Gureyev 和 Nugent[123]提出了另一种消除边界条件需要的方法,即考虑到在区域内部光强强度为正但在边界处严格光强完全消失的特殊情况(因此 $I\partial\phi/\partial n|_{\partial\Omega}=0$)。或者,在对测量样品和实验条件没有任何额外要求的情况下,Volkov 等人[125]提出了一个纯数学技巧,通过输入图像的适当对称化来消除边界上的能量流。然而,其假设任何物体都没有通过图像边界的能量耗散,这显然是在物理上没有依据的。综上所述,“无边界值测量”并不意味着可以在不附加任何边界条件的情况下就可以求解 TIE,或者更准确地说,必须将要测量的物体或实验条件限制在某些隐

式边界条件下。

对于更一般的情况，如图 12(b)所示，FOV 内的能量不守恒，因为当记录距离改变时，在 FOV 边界处会发生能量“泄漏”。在这种情况下，必须采用非齐次边界条件来求解 TIE 以便获得正确相位重建。Zuo 等[122]讨论了非均匀光照明下非齐次 Neumann 边界条件下的 TIE 解。如图 12(c)所示，通过引入一个硬边界光阑来限制要测量的光波场，使其硬性满足能量守恒的要求，并且可以在孔径边缘直接测得非齐次的 Neumann 边界值 $I\partial\phi/\partial n|_{\partial\Omega}$。在矩形孔径的情况下，可采用 DCT 高效并准确求解 TIE，这在微透镜表征的应用中得到了很好的证明[123]。Huang 等[124]通过迭代补偿机制进一步将 DCT 求解算法扩展到任意形状的孔径。最近，Ishizuka 等[128-129]将迭代 DCT 求解算法应用到了 TEM 中，成功地恢复了出了图像平面上的光场曲率相对应的附加相位。

3.2.2 相位差异的成因与补偿

关于 TIE 求解的另一个重要问题是由于引入了 Teague 辅助函数[20]而导致的“相位差”，Teague 假设的本质是认为横向光场是保守的，因此存在满足公式(11)的标量势 Ψ。然而，在实际情况中，Teague 的辅助函数并不总是存在，因为横向能流分量只是一个普通的二维标量场，并不一定是保守场，因此求解 TIE 得到的解不一定与真实的精确解相吻合[130]。这个问题最早由 Allen[117]等人在 2001 年提出[120]十年后，Schmalz 等人[130]根据 Helmholtz 分解定理对该问题进行了较为详细的理论分析，并将横向能流分量分解为标量势 ψ 的梯度项和矢量势 η 的旋度：

$$I\nabla\phi=\nabla\psi+\nabla\times\eta \tag{15}$$

与公式(12)相比，可以很明显地看出，在 Teague 假设中忽略了 $\nabla\times\eta$ 项，这无形中增加了一个隐含假设，即横向能流分量是无旋的(见图 13)。2014 年，

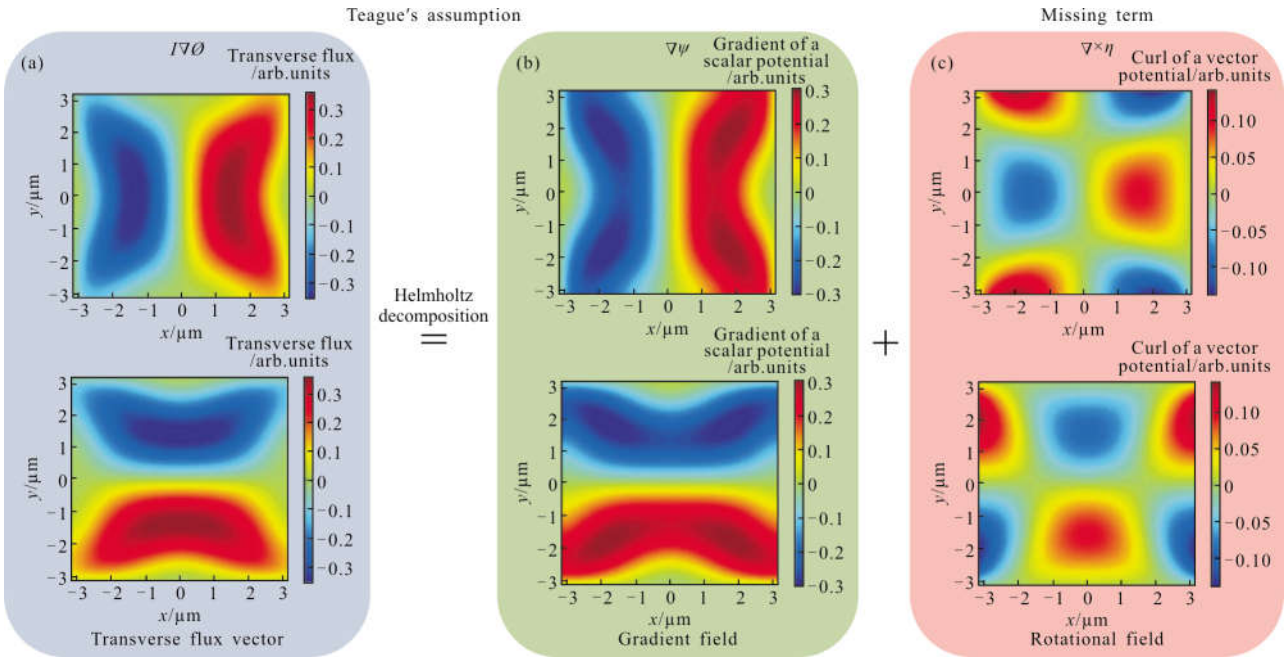

图 13 横向能流分量的亥姆霍兹分解，其中向量场的 x 和 y 分量分别显示在图中的第一行和第二行，Teague 假设中缺少的是 $\nabla\times\eta$ 项

Fig.13 Helmholtz decomposition of the transverse flux field. The x and y components of the vector fields are shown in the first row and the second row, respectively. The term $\nabla\times\eta$ is missing in Teague's assumption

Zuo 等[131]考察了缺失旋转项对相位重建的影响，推导出了 Teague 假设有效性的充要条件：

$$\nabla I^{-1}\times\nabla^{-2}[\nabla\cdot(\nabla I\times\nabla\phi)]=0 \tag{16}$$

公式(16)表明，当聚焦强度分布接近均匀时，由 Teague 辅助函数引起的相位差异很小($\nabla I^{-1}\times\nabla^{-2}[\nabla\cdot(\nabla I\times\nabla\phi)]\approx0$)，然而，当被测样品表现出较强的吸收性时，由 Teague 假设所导致的相位差异可能会很大，所以这时“相位差异”问题不能忽略[145-146]。为了

补偿 Teague 假设导致的相位差，Zuo 等[130]提出了一种简单而有效的 Picard 类型的迭代补偿算法[130]，该算法逐步积累相位，直到获得自洽解。在两到四次迭代中，Teague 假设所致的相位误差就可以被补偿到一个可忽略的水平了，此时 TIE 的精确解也就可以得到了。

3.2.3 光强的轴向微分估计

由上节可知，为了求解 TIE，需要知道待测面上的光强分布 I 和光强的轴向微分 $\partial I/\partial z$。实验表明，聚焦光强分布 I 很容易获得。然而，光强的轴向微分并不可直接测量。通常是通过采集不同传输距离(至少两个面)上的光强分布并由数值差分法估计得到，这两幅离焦图像对称地在离焦距离为 $\pm\Delta z$[20]的焦内平面上被记录。

$$\frac{\partial I(r)}{\partial z}\approx\frac{I_{\Delta z}(r)-I_{-\Delta z}(r)}{2\Delta z} \tag{17}$$

在数学上，这种近似方法在小散焦距离的极限下是有效的，如果数据没有噪声，误差是焦距的二阶。然而实际测量中存在的噪声、探测器的量化效应等因素使该光强微分估计问题复杂化。当距离 Δz 太小时，光强微分估计会被噪声所淹没，此时重建的相位中就会出现严重的云雾状低频噪声[133]。另一方面，为了提高信噪比(SNR)，不得不增加 Δz，但是 Δz 取的过大时，相位模糊作用也就越发明显[134]。因此，在有噪声的情况下，Δz 的选择必须在平衡非线性误差和噪声效应之间作出折中[135]。具体来说，最优 Δz 一定是与噪声水平和物体本身的特征密切相关[135-136]。然而实际情况中噪声水平与物体的空间频率这两方面的先验知识往往在测量前都难以预知。

为了解决上述问题，许多研究者提出采用多面(>2)的强度测量对轴向微分进行估计[133-134,137-145]。通过更多的强度测量 $I_{j\Delta z}(r)$，$j=-n,\dots,-1,0,1,\dots,n$，光强的轴向微分可以用它们的线性组合表示：

$$\frac{\partial I(r)}{\partial z}\approx\sum_{j=-n}^{n}\frac{a_jI_{j\Delta z}(r)}{\Delta z} \tag{18}$$

为了更灵活地校正非线性误差和降低噪声的影响，研究学者提出了大量的有限差分方法，如高阶有限差分法[134,139,144,146]、降噪有限差分法[138,147]、降噪高阶有限差分法[140]和最小二乘拟合法[134]。这些多平面轴向微分估计方法的唯一区别在于公式(18)中的系数 a_j，如果从数字滤波器[141]的角度看有限差分(公式(18))可以将这些方法统一为不同阶的 Savitzky-Golay 差分滤波器(SGDF)[1148-150]。不同于固定阶次的有限差分方法，这种在空间频域中进行相位分解，并利用适当的有限差分近似获取轴向微分估计的每一个傅里叶分量的方法更具优越性，因为它们可以用于平衡噪声和衍射导致的大范围空间频率内的非线性误差[127-129,133]。例如，Zuo 等提出的最优频率选择(OFS)方案[133]利用空间频域中的互补滤波器组，选择不同阶次的 SGDF 重构相位的最优空间频率成分，组合成为最优重建相位结果。Martinez 等[128]扩展了多滤波器和频率选择的思想，以适应传统的三平面 TIE 求解算法。Jenkins 等[130]将多滤波器相位成像的基本原理推广到部分相干照明的场合。Falaggis 等[75]发现，多平面相位恢复获得的最优测量距离可以形成一个几何序列，该几何序列可以利用最少平面数最大化地扩大恢复的空间频率范围。该方法已成功地应用在高斯回归 TIE (GP-TIE)[132] 和最优频率组合 TIE(OFC-TIE)方法[129]中，进而显著地减少了光强测量次数，同时获得高精度的相位重建。

虽然多平面 TIE 可以解决传统的三平面 TIE 在噪声与空间分辨率之间的折中问题，但是由于需要获得不同离焦距离下的光强信息，因而增加了光强测量次数。而手动调整或机械平移不可避免地会减慢数据采集速度，从而导致无法对动态过程进行实时相位成像。这个问题与多平面迭代相位恢复算法中遇到的问题基本相同。基于多波长照明[151,152]、电控变焦透镜[78,153]、SLM[122,154]和倾斜流式细胞术[155]的技术可实现对样品的快速变焦扫描，从而消除了任何手动或机械操作以及多个摄像机的同步需求，从而实现了动态 TIE 相位成像。此外，如图 14 所示，基于该技术[78,119,153]发展出一个附加模块，可用于商用显微镜，从而使定量相位成像具有新的特点：减小部分相干照明导致的散斑效应，以及与显微镜的其他模式相结合产生多模式成像(例如荧光技术、微分干涉相衬技术(DIC)、相衬技术)。最近的研究表明，照明孔径的形状对 TIE 重建的横向分辨率和噪声灵敏度也有着重要的影响[158-159]，简单地采用环形照明孔径代替传统的圆形照明孔径，只需测量三个平面光强图[156-157]就可以实现高分辨率低噪声相位成像。

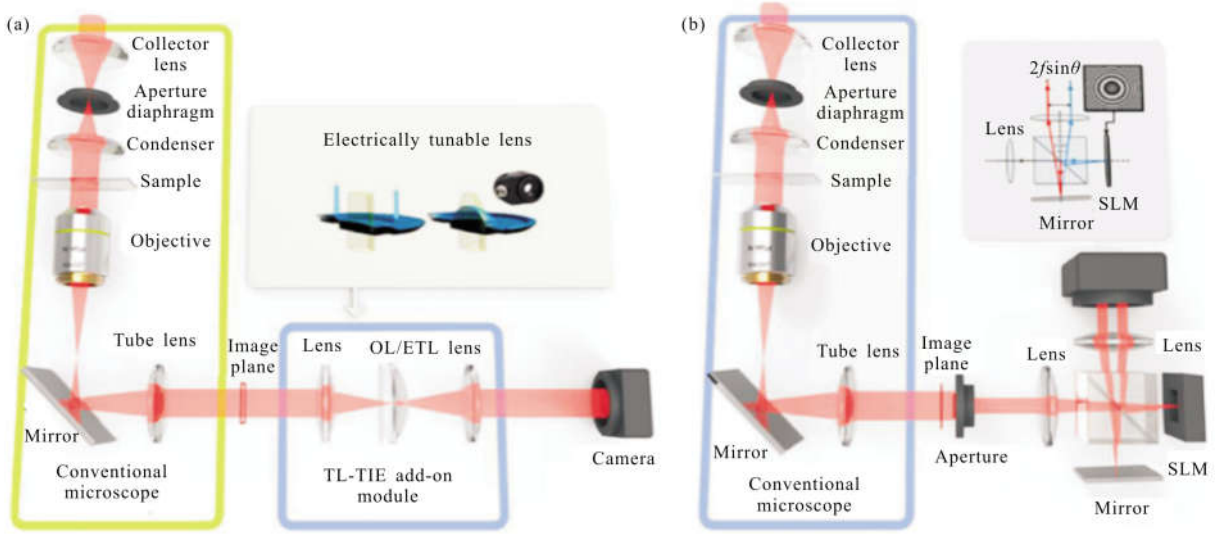

图 14 用于动态 TIE 相位成像的实验系统图,这可以作为一个简单的附加模块用于传统显微镜。(a)基于电控变焦透镜的 TIE 显微镜系统(TL-TIE);(b)基于 SLM(SQPM)的单帧 TIE 系统

Fig.14 Advanced experimental setups for dynamic TIE phase imaging, which can be implemented as a simple add-on module to a conventional microscope. (a) Electrically tunable lens based TIE microscopy system (TL-TIE); (b) single-shot TIE system based on a SLM (SQPM)

4 光线场和光波场成像之间的联系

由于几何光学与波动光学的联系紧密[7],基于这两种理论的三维成像技术有很多共同之处。Yamaguchi 认为波前的相位信息将会对光线场的分辨率产生影响[3]。这个概念在一定程度上可以从图 2 直观地理解。光线是是沿着波前的法向方向传播的,这也可以看作是物理界连续波前的一种稀疏采样。

许多技术都可以反映波前和光线之间的紧密联系,如 Shack-Hartmann 波前传感器、基于透镜阵列的光线场成像、TIE 和 LFMI。基于该紧密联系的优势,还发展出许多技术,例如基于多角度的合成全息成像[160]、立体全息[161-162]和三维傅里叶叠层显微成像[163]。在下文的章节中,详细介绍了光波场和光线场成像之间的紧密联系。

正如在第 2.2 节中所提到的,Teague 从亥姆霍兹方程推导出了最初的 TIE[20]。然而,Teague 推导 TIE 时是基于傍轴近似以及完全相干光场的假设。然而,这一假设并不适用于部分相干光。在这种情况下,可以用光学相干理论[7,52]来描述光场,即可以利用光场的二阶相关函数 (如四维互相关函数和互谱密度)对部分相干光场进行表征。然而,这些物理量所需的数学运算相当复杂,且对于结果难以给出直观的物理解释。另一种思想流派主要来自于基于几何光学的计算机视觉领域。在传统光学成像系统中,来自物体某一点的所有光线都聚焦在物体点共轭位置的像点上,导致光线方向信息丢失,因此无法实现多视角成像和深度信息获取。在几何光学中,相位的概念并不存在。相反,在第 2 节[30,164]中介绍的光场同时具有强度和方向信息,并且与波动光学中的相位有关。这也正是本节的核心问题,“相位”一词的含义是什么?与光场有什么关系?

对于单色相干光而言,“相位”的定义是非常明晰的:其为描述光波场复振幅函数的幅角部分。这样一个完美的时空相干光场有一个对应于等相位表面的波前。如图 15(a)所示,在几何光学中,光线的传播的方向垂直于波前(所谓波前其实就是等相位面),这表明波前和时间平均坡印廷矢量的方向一致[81,165]。然而,几何光学中的光场不足以描述光的波动现象,如干涉、衍射和相干效应。所以对于非相干光场,“相位”的定义必然与传统意义上相干光场下的定义存在差异,因此需要对其传统的定义进行拓展。

作为一种将波动光学与几何光学连接起来的准

概率密度分布,WDF 是一种相空间分布，其可被用于部分相干光场的表征[166],即可同时描述信号的频率与空间信息的。如图 15(b)所示,WDF 的时频联合描述特性与几何光学中光线的概念极其相似。WDF 为辐射测量理论构建了波动光学基础，其可以取负值[167],因此它可以严格解释光的干涉和衍射之类的波动光学效应。与互相干函数和互谱密度函数相比,WDF 能够更直观地表示部分相干光。因此,需要一个简单的相空间 TIE 数学模型，为部分相干光场下“相位”的意义提供合理解释,从而促进广义 TIE 的应用范围拓展到光场成像领域。

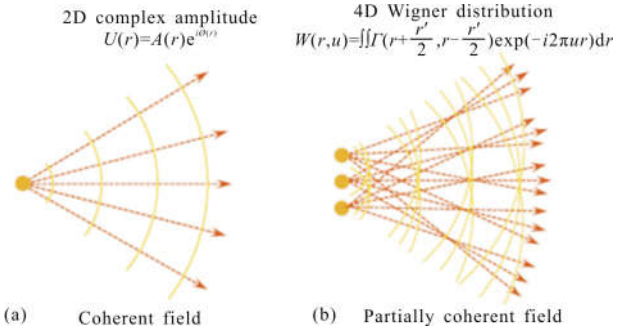

图 15 相干光场和部分(空间)相干光场的简单示意图,(a)对于相干光场,等相位面称为波前,几何光线垂直于波前。其可完全由二维复振幅表示;(b)部分相干光场需要像维格纳分布一样的 4D 相干函数来精确地描述其性质,如传播和衍射。此外,一个部分相干光场并没有一个明确的相位,而是在空间中每个位置的相位(空间频率、传播方向)的统计集

Fig.15 Schematic of a simplistic view of coherent field and partially (spatially) coherent field, (a) for coherent field, the surface of the constant phase is interpreted as wavefronts with geometric light rays traveling normal to them. It is fully described by 2D complex amplitude; (b) partially coherent field needs 4D coherence function, like the Wigner distribution, to accurately characterize its properties, like its propagation and diffraction. In addition, a partially coherent field does not have a well-defined phase, but rather a statistical ensemble of phases (spatial frequencies, propagation directions) at every position in space

4.1 部分相干光下的广义光强传输方程

以相空间光学理论作为切入点，以刘维尔(Liouville)传输方程[166]为基础,Zuo 等[168]推导出了部分相干光下的广义 TIE(GTIE)。

$$\frac{\partial I(r)}{\partial z}=-\nabla\cdot\iint\lambda uW_{\omega}(r,u)\mathrm{d}u\mathrm{d}\omega \tag{19}$$

式中:u 为对应于空间坐标 r 的空间频率坐标;$W_{\omega}(r,u)$为部分相干光波场中单色成分的四维维格纳分布函数(WDF),光学频率 $\omega=c/\lambda$,其中 c 是光速,λ 是光波波长。在准单色光近似下,可以近似地认为其是完全时间相干。然后,将空间部分相干光场的方程(19)简化为 GTIE[168]。

$$\frac{\partial I(r)}{\partial z}=-\lambda\nabla\cdot\int uW(r,u)\mathrm{d}u \tag{20}$$

如果进一步将光场限制为空间完全相干，则其可以由二维复振幅函数 $U(r)=\sqrt{I(r)}\exp[i\phi(r)]$表示,其中 $\phi(r)$是相干光场的相位,如图 15(a)所示。从时间(空间)频率的角度来看,次是完全相干光场可以被认为是一单分量信号。因此，WDF 的一阶频率矩与相干光场下相位的横向梯度有如下关联[169,70]:

$$\frac{\int uW(r,u)\mathrm{d}u}{\int W(r,u)\mathrm{d}u}=\frac{1}{2\pi}\phi(r) \tag{21}$$

将公式(21)代入公式(20)得到公式(9),这就是 Teague 在相干光场下推导出的 TIE。因此,当光场完全是时间和空间相干时,Teague 推导出的 TIE 只是 GTIE 的一个特例。相比之下,GTIE 考虑了光场空间和时间的部分相干性,因此其具有更广泛的应用范围。

4.2 部分相干光下“相位”的广义定义

对于部分相干光，二维复振幅函数已不足以完整描述光波场(四维互相干函数)的性质[80]。然而,尽管在非相干光场中“相位”的含义与传统意义上完全相干光场中的含义明显不同，但是人们仍然可以通过轴向光强图像堆栈结合 Teague 推导的 TIE 重构出聚焦平面的二维复振幅函数。早在 1984 年,Streibl[116]就采用四维互强度函数分析了部分相干照明下的成像过程,并证明了采用 TIE 进行相位成像的可能性。他还指出，利用 TIE 在空间部分相干照明下的有效性,即当拓展光源关于光轴对称分布时,可以通过求解 Teague 推导的 TIE 获得物体的相位分布。Paganin 和 Nugent[81]重新解释了部分相干光场中的相位,指出相位是一个标量且梯度对应于时间平均的坡印廷矢量。基于多色光场的谱分解,Gureyev 等[165]提出了

用广义光程函数理论,结论表明,当光源的光谱分布已知时,即使部分相干照明下也可通过求解 TIE 获得准确的相位分布。Petruccelli 等[171]将从 TIE 中获得的相位解释为一个标量势函数,其梯度与光场的横向能流分量有关。

上述研究工作定量阐明了部分相干光场下相位的物理意义,证明了 TIE 在部分相干照明下的适用性。然而,由于引入了互强度、互谱密度等物理量描述光波场的传播与衍射,数学表达较为复杂,最后获得的结论很难有直观的物理解释。相反,利用相空间光学理论,GTIE 定义了一个更直观和更广义的“相位”。如公式(21)左侧所示,广义相位被定义为一个标量势函数,其梯度为 WDF 的一阶空间频率矩,即光波场中某一个空间位置的平均频率。在光学背景下,可以直观地将 $W(r,u)$解释为通过点 r,空间频率(传播方向)为 u 的光线的能流密度。因此,公式(21)表明,将时间平均能流方向定义为广义相位的梯度方向,其与时间平均坡印廷矢量的方向相同[81]。然而,由于 WDF 可以取负值,因此其不是相空间中严格的概率密度函数分布[172-173]。但是如果用 WDF 表示其他可测量的量,例如公式(21)中的强度和时间平均的坡印廷矢量,则不会出现问题,因为这些物理量总是非负的。

4.3 基于光强传输方程的计算光场成像

已经在第 2 节中介绍了计算光场成像方法 LFMI。利用几何光学近似,将 TIE 与光线场进行关联。这两种技术本质上都是对场进行完整描述,只是描述的角度角度不同。光线场(辐亮度)将所有可能的光线表示为位置和方向的函数,而在相干成像中,这些信息被包含在二维复振幅函数的振幅和相位中。二维光强和相位函数提供了关于相干复振幅场的全部信息,所以光线场的传播与相关行为都可以通过计算机数值计算来精确描述与预测。通过这种方式,可以通过纯计算的方式去实现 Zernike 相衬成像,DIC 等,且并不需要实际的成像硬件[78,156,174,175]。因此,采用四维相空间表征二维完全相干光场时数据显然是高度冗余的。这种冗余将会导致 WDF 的高度局部化,但这通常也会伴随着由相空间干涉而引起的波动[167,176-177]。对于一个缓变物体,其相空间的冗余性将变得更加明显,因为相空间的波动将会消失并且信号在相空间仅仅占据一个二维切片[168]:

$$W(r,u)=I(r)\delta\left[u-\frac{1}{2\pi}\phi(r)\right] \tag{22}$$

通过去除负值,上面给出的 WDF 代表了物体真实的能量概率密度分布,其表明了通过某点 r 的光线(能流)沿着相位法向决定的方向移动,如图 15(a)和 16(a)所示。这使得相位测量可以通过对光线方向进行测量而实现,如 Shack-Hartmann 传感器[178]。图16给出了一个平滑相干波前(球面波)的 WDF 以及光场分布的一维示意图。可以发现,光线的传播方向垂直于相位梯度方向,而 WDF 中空间频率与光场中光线传播角度之间的联系可以简单概括为 $\theta\approx\lambda u$。

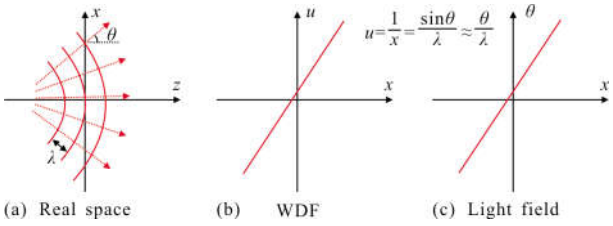

图 16 平稳相干波前(球面波)的维格纳和光场分布的一维示意图。相位在维格纳分布中通过局部空间频率(瞬时频率)来显示。光线的传播方向垂直于波前(相位梯度法向)

Fig.16 WDF and light field of a smooth coherent wavefront. Phase is represented as the localized spatial frequency (instantaneous frequency) in the WDF representation. Rays travel perpendicularly to the wavefront (phase normal)

对于部分相干光而言,上述情况要复杂的多。由于部分相干光场的四维 WDF 一般是非冗余的。二维振幅和(广义)相位不足以精确地确定光场[179]。从几何光学的角度来看,光束上的每一点都存在着许多方向不同的光线,它们向外发散成一个二维分布,这说明部分相干光场具有高维性,如图 17(b)所示。完整的四维互相干函数(或等价的四维 WDF)的测量与恢复一直是个研究热点。相关方法包括:直接干涉测量法[180-181]、相空间断层扫描技术[182-183]、多平面相干恢复法[184-185]和加窗傅里叶变换法[186-187]等。所有这些技术都需要额外的测量维度(如引入非对称光学元件)和更多的光强测量。如果光场表现出明显的空间非相干性,那么相空间的负值性和振荡将会很容易被消除。在计算机图形学领域,对应于 Shack-Hartmann 传感器,光场相机也可以同时获得所有

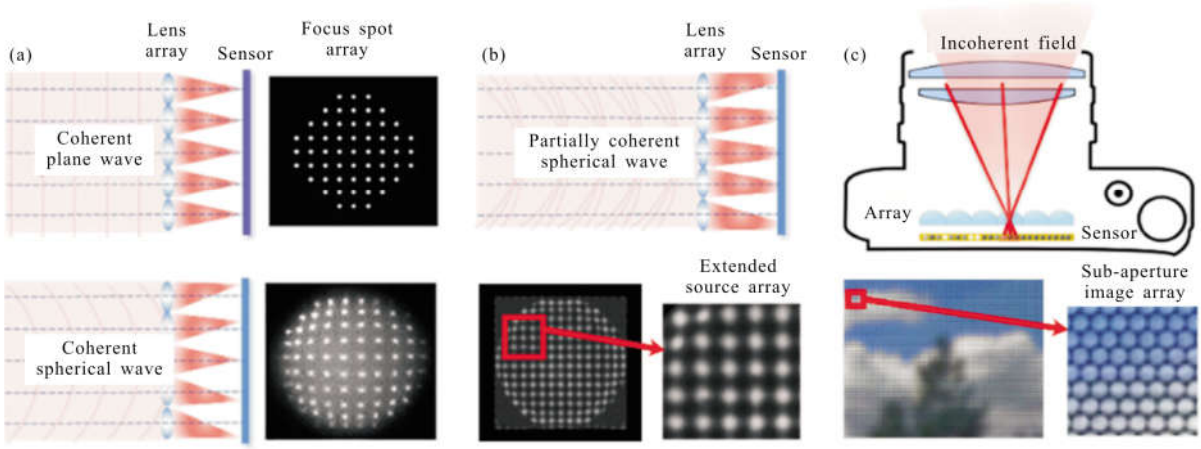

图 17 Shack-Hartmann 传感器和光场相机的原理图。(a)对于相干光场,Shack-Hartmann 传感器形成聚焦点阵列信号;(b)对于部分相干光场,Shack-Hartmann 传感器形成扩展源阵列信号;(c)对于非相干成像,光场相机产生二维子孔径图像阵列

Fig.17 Principle of the Shack-Hartmann sensor and light field camera. (a) For coherent field, the Shack-Hartmann sensor forms a focus spot array sensor signal; (b) for a partially coherent field, the Shack-Hartmann sensor forms an extended source array sensor signal; (c) for incoherent imaging, the light field camera produces a 2D sub-aperture image array

光线的强度与其角度分布[29,31],所以可以利用光线追迹法去计算各种合成图像、深度估计、重聚焦和透视[31,41]。然而,相比于传统成像方法,光场成像本身装置复杂且严重牺牲了成像分辨率。

如公式(21)所示,光场的广义相位是一个标量势,其梯度等于 WDF 的一阶频率矩。利用 WDF 与光场[68]之间的对应关系,即将 $L(x,\theta)\approx W(r,u)$代入到公式(21),可以得到几何光学近似下的广义相位,即:

$$\frac{\int \theta L(x,\theta)\mathrm{d}\theta}{\int L(x,\theta)\mathrm{d}\theta}=k^{-1}\nabla\phi(r) \tag{23}$$

该公式表明,相位梯度与光场的角分布矩有关。简而言之,角分布矩就是光场的重心,也就是通过空间某一位置的光线角度的加权平均。通过公式(23),Zuo 等[168]提出并通过实验验证了两个观点:(1) 四维光场包含了二维相位信息,通过光场成像可以直接进行相位重构,相位梯度可以简单地通过对原始光场图像中每个子孔径图像进行重心检测得到,这与 Shack-Hartmann 波前传感器中的标准步骤别无二致[178]。然而,对于空间相干度不同的光场,原始光场图像的特征也完全不同。对于相干波前,单个位置的几何光线仅沿单个方向传播,因此 Shack-Hartmann 传感器形成一个焦点阵列信号,如图 17(a)所示。如图 17(b)所示,对于部分相干光场,单个位置的几何光线沿不同方向传播,从而形成一个二维扩展源阵列信号。由于该光场表现出明显的空间不相干性,空间某一位置的光线向所有可能的方向传播,在图像传感器中产生子孔径图像阵列,如图 17(c)所示。(2) 一般来说,求解 TIE 虽然无法重构完整四维光场,但可以获得光场的一阶矩即重心。在某些简单的情形下,如空间平稳照明下的缓变物体,四维光场高度冗余。如图 18 所示,样品为一个“无散”系统,其并不改变

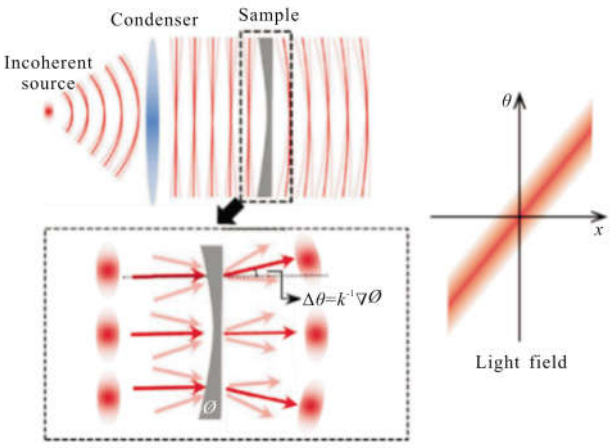

图 18 缓变物体在空域平稳照明下的光场表示。样品针对入射光场分布表现为一种角平移不变性,通过每个空间位置上的每条光线的角度均被物体所转动了 $k^{-1}\nabla_x\phi$

Fig.18 Light field representation of a slowly varying object under spatially stationary illumination. The sample exhibits angle-shift invariance: at each location, the direction of each incident ray shifts by the amount of object phase gradient $k^{-1}\nabla_x\phi$

入射光场的角分布(由主级光源光强决定),并且对于每一束照射样品的光线，其在相同位置射入图物体,其传播方向依物体的相位梯度(折射)而改变。这就是在图 17(b)中 Shack-Hartmann 传感器形成扩展源阵列信号的原因。因此,根据光源的光强分布(光场的角分布)和物体的相位 $\phi(r)$(通过求解 TIE 得到),可以完全构建出四维光场。

此时,样品显示出角位移不变性:通过每个空间位置上的每条光线的方向都随物体相位梯度的变化而变化;正如在第 2 节[26]中介绍的,LFMI 是应用TIE 思想实现光场成像的一个例子。2014 年,Zuo 等[120]发表评论指出 LFMI 实际上是 TIE 在几何光学近似下的变体，任何关于 TIE 的求解和轴向微分估计方法均可直接移植到 LFMI 中。2015 年,Liu 等[67]采用基于多平面光强测量的高阶有限差分法优化光强的轴向微分估计,提高了 LFMI 的图像质量和信噪比。如前所述,TIE 恢复的相位只能用于重建四维光场的一阶矩,这也正是 LFMI 中“矩”的物理意义。

5 结 论

文中从基于光线和波前的成像两个方面概述了基于深度测量的三维成像技术。

基于深度测量的光线场成像技术发展至今只有几年的时间。相关技术可分为 LFBP 和 LFMI 两类。由于没有阵列器件的分割，重建后的光线场空间分辨率仅受相机 NA 的限制。此外,除了空间分辨率、精度、噪声、深度分辨率和遮挡这些问题,这些方法无需任何特殊的成像器件,如透镜阵列,编码掩模,所以非常容易实现。一般来说,LFBP 可以实现更精确的光场重建,而 LFMI 只能重建透视图。在 LFBP 中的离焦信息需要额外的图像处理[51,63]或迭代方法[71,72]来抑制。然而,无论是图像处理还是迭代方法都不是获得高轴向分辨率光场的最佳选择，其原因是轴向分辨率与测量的轴向间隔有直接关系。要获得高精度的轴向分辨率需要减小轴向采样间隔,而这又会增加测量次数以及噪声抑制难度。此外,测量次数的增加不仅非常耗时，而且可能需要额外的实验设备[64]。另一个存在于这些技术中的问题是遮挡问题(迭代可以稍微缓解这个问题)[71-72]。表 2 对现有技术以及他们之间的比较给出了总结。很明显,在基于深度测量的光场成像和基于阵列的光场成像之间存在着时空折衷。根据第 4 节的描述,考虑到光线场成像和光波场成像的联系，从波前的角度分析光线场或许可以促进这两个研究领域的发展。一个值得一提的例子是 LFMI。尽管目前 LFMI 还不能重建出精确的光场,但它开创了一个新的光场成像概念。

表 2 光线场重建技术比较

Tab.2 Comparison of light ray field reconstruction techniques

	Accuracy	Noise	Occlusion	Time cost
LFBP I[62]	Moderate	High	Exists less	Low
LFBP II[49,63]	Moderate	Low	Exists partially	High
iLFBP[71,77]	High	Low	Exists less	High
LFMI[26]	Low	High	Exists	Low

研究人员已经证明了光波场的成像和光线场成像之间的密切联系。光波场成像中的相位梯度与光线场的一阶矩有关。LFMI 和 Shack-Hartmann 传感器都证明了这一点,这使得基于波前的成像技术(光波场成像) 与基于深度测量的光线场成像技术有很多共同之处。

基于波前的三维成像技术主要致力于获得波前的复杂光场;虽然迭代法已经被提出了几十年,并且一直在被改进,但其仍有许多问题未被解决。表 2 给出了各迭代相位恢复方法及其比较。尽管表 2 中的各种技术都有局限性,但由于最优传递函数是与物体相关的,以及其操作简单,因此迭代相位恢复仍然是波前重构的一种常用方法。然而,基于标量衍射理论的迭代相位恢复法只有在相干光明条件下起作用,因而限制了其进一步的应用。因此直接法 TIE 被看作是对于迭代相位恢复技术的一种有效的补偿方法。

基于 TIE 的相位恢复和三维成像方法的出现、发展与完善标志着相位探测技术已经发展到一个崭新阶段,即从干涉发展为非干涉,从迭代发展为到非迭代,从单纯的相位测量发展为光场重构,从严格相干发展为部分相干甚至非相干。文中从 TIE 的基本原理、方程求解、光强轴向微分的差分估计、部分相干成像与光场成像及其在光学显微成像中的应用等几个方面综述了研究现状与最新进展。表 3 比较了 TIE 求解方法、边界条件、相位差异、轴向微分等技

术。由于 TIE 非干涉、适于时空部分相干照明的优点使定量相位成像可以在传统光学显微镜下得以实现。得益于显微镜系统内置的科勒照明结构与经过像差优化的成像物镜，很容易获得具有衍射极限的分辨率的定量相位图像，不用担心相干噪声问题。且单光束光学结构稳定性强，对振动等干扰不敏感，无需复杂的隔振器械。然而，就目前而言。基于 TIE 的相位恢复算法仍有局限性。首先，其测量精度与干涉测量法相比仍有一定的差距。第二，TIE 只能在傍轴近似下使用，且光强值必须严格为正。当光强包含极小值、零点或者相位漩涡存在时，利用 TIE[188-189]恢复相位将会变得非常困难。最后，正如在第 4.2 节中所述，TIE 只能恢复二维的光场矩，而不能实现 4D 光场的完全重构。因而如何通过引入额外信息(如将低分辨率的光场相机(Shack-Hartmann)测量与传统离焦高分辨率光强序列相结合)重建全分辨率的 4D 光场，将会是未来较有前景的一个研究方向。

表 3 TIE 技术比较

Tab.3 Comparison of TIE techniques

Issues	Techniques	Pros	Cons
TIE solvers	Green′s function[20,124]	Theoretical analysis	Computation-extensive, memory-demanding
	Multi-Grid[125,126] Zernike polynomials[127,128]	Simple and fast Precisely represent the optical aberration	Low-frequency noise, only for circular regions, difficult to follow details
	FFT[81,125,128,129]	Fast, easy to implement, incorporate regularization in reconstruction	Imply periodic boundary conditions
	DCT[130,131]	Fast, inhomogeneous Neumann boundary condition	Rectangular aperture, required to limit FOV
	Iterative DCT[132]	Inhomogeneous Neumann boundary condition, arbitrarily shaped apertures	Need several iterations
Boundary conditions	Homogeneous dirichlet/ Neumann[133,134]	Easy to apply, can be implemented by different solvers	"Flat" boundary phase
	Periodic[81,125,128,129]	Can be implemented by FFT-based solver	Periodic boundary phase
	Inhomogeneous dirichlet[20]	-	Boundary phase required
	Inhomogeneous Neumann[130-132]	Can be measured by introducing a hard aperture	-
Phase discrepancy	Picard-type iteration[135]	Can compensate the phase discrepancy	Need 2-4 iterations
Axial derivative	2-planes[20]	Less intensity acquisition	Noise-resolution trade off
	Multi-planes[136-146]	Higher resolution, better noise tolerance	More measurements

由于光源和成像特性的不同，因此基于光线和波前的成像技术有着不同的应用。基于波前的三维成像在微观细节测量方面具有较高的效率，因此其通常用于显微成像领域[11]。光线场是对光的一种更稀疏的采样，因此其通常用于宏观成像[12]。然而，两者本质上是等效的且存在互利的紧密联系[182]。综上所述，虽然目前没有一个完美的技术可以同时达到成像质量良好(分辨率、噪声)、耗时低和系统简单，但笔者等相信，如果融会贯通，就有可能提出更优越的技术。

参考文献：

[1] Watanabe T M, Sato T, Gonda K, et al. Three-dimensional nanometry of vesicle transport in living cells using dual-focus imaging optics [J]. ***Biochem Biophys Res Commun***,

2007, 359: 1-7.

[2] Tanida J, Kumagai T, Yamada K, et al. Thin observation module by bound optics (TOMBO): concept and experimental verification[J]. ***Appl Opt***, 2001, 40: 1806-1813.

[3] Yamaguchi M. Light-field and holographic three-dimensional displays [J]. ***J Opt Soc Am A***, 2016, 33: 2348-2364.

[4] Martínez-Corral M, Javidi B. Fundamentals of 3D imaging and displays: A tutorial on integral imaging, light-field, and plenoptic systems[J]. ***Adv Opt Photonics***, 2018, 10: 512-566.

[5] Bruning J H, Herriott D R, Gallagher J E, et al. Digital wavefront measuring interferometer for testing optical surfaces and lenses[J]. ***Appl Opt***, 1974, 13: 2693-2703.

[6] Wolf E. Three-dimensional structure determination of semi-transparent objects from holographic data [J]. ***Opt Commun***, 1969, 1: 153-156.

[7] Born M, Wolf E. Principles of Optics [M]. 7th ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

[8] Saleh B E, Teich M C, Saleh B E. Fundamentals of Photonics[M]. 2nd ed. Wiley: New York, 2007.

[9] Gershun A. The light field [J]. ***J Math Phys***, 1939, 18: 51-151.

[10] Lam E Y. Computational photography with plenoptic camera and light field capture: Tutorial [J]. ***J Opt Soc Am***, 2015, 32: 2021-2032.

[11] Zheng J, Micó V, Gao P. Resolution enhancement in phase microscopy: A review[J]. ***Preprints***, 2018,

[12] Hong J, Kim Y, Choi H J, et al. Three-Dimensional display technologies of recent interest: principles, status, and issues [J]. ***Appl Opt***, 2011, 50: H87-H115.

[13] Park S G, Yeom J, Jeong Y, et al. Recent issues on integral imaging and its applications[J]. ***J Inf Dis***, 2014, 15: 37-46.

[14] Zhao Y, Kwon K C, Piao Y L, et al. Depth-layer weighted prediction method for a full-color polygon-based holographic system with real objects[J]. ***Opt Lett***, 2017, 42: 2599-2602.

[15] Li G, Hong K, Yeom J, et al. Acceleration method for computer generated spherical hologram calculation of real objects using graphics processing unit [J]. ***Chin Opt Lett***, 2014, 12: 060016.

[16] Mait J N, Euliss G W, Athale R A. Computational imaging [J]. ***Adv Opt Photonics***, 2018, 10: 409-483.

[17] Horisaki R, Ogura Y, Aino M, et al. Single-shot phase imaging with a coded aperture [J]. ***Opt Lett***, 2014, 39: 6466-6469.

[18] Fienup J R. Phaseretrieval algorithms: Acomparison[J]. ***Appl Opt***, 1982, 21: 2758-2769.

[19] Testorf M, Hennelly, B, Ojeda-Castaneda J. Phase-Space Optics[M]. New York: McGraw-Hill Professional Publishing, 2009.

[20] Teague MR. Deterministic phase retrieval: A Green′s function solution[J]. ***J Opt Soc Am***, 1983, 73: 1434-1441.

[21] Gabor D. A new microscopic principle [J]. ***Nature***, 1948, 161: 777-778.

[22] Poon T C. Digital Holography and Three-Dimensional Display: Principles and Applications [M]. London: Springer, 2006.

[23] Boesl U. Time-of-flight mass spectrometry: Introduction to the basics[J]. ***Mass Spectrom Rev***, 2016, 36: 86-109.

[24] Geng J. Structured-light 3D surface imaging: A tutorial [J]. ***Adv Opt Photonics***, 2011, 3: 128-160.

[25] Banks M S, Read J C A, Allison R S, et al. Stereoscopy and the Human Visual System [J]. ***SMPTE Motion Imaging J***, 2012, 121: 24-43.

[26] Orth A, Crozier K B. Light field moment imaging [J]. ***Opt Lett***, 2013, 38: 2666-2668.

[27] Levoy M. Light fields and computational imaging [J]. ***Computer***, 2006, 39: 46-55.

[28] Levoy M, Ng R, Adams A, et al. Light field microscopy[J]. ***ACM Trans Gr***, 2006, 25: 924-934.

[29] Ng R. Fourier slice photography [J]. ***ACM Trans Gr***, 2005, 24: 735-744.

[30] Levoy M, Hanrahan P. Light field rendering[C]//Proceedings of the 23rd Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, 1996: 31-42.

[31] Ng R, Levoy M, Brédif M, et al. Light field photography with a hand-held plenoptic camera [J]. ***Comput Sci Tech Rep***, 2005, 2: 1-11.

[32] Xiao X, Javidi B, Martinez-Corral M, et al. Advances in three-dimensional integral imaging: sensing, display, and applications[J]. ***Appl Opt***, 2013, 52: 546-560.

[33] Wilburn B, Joshi N, Vaish V, et al. High performance imaging using large camera arrays[J]. ***ACM Trans Gr***, 2005, 24: 765-776.

[34] Lin X, Wu J, Zheng G, et al. Camera array based light field microscopy[J]. ***Biomed Opt Express***, 2015, 6: 3179-3189.

[35] Georgiev T, Zheng K C, Curless B, et al. Spatio-angular resolution tradeoffs in integral photography[J]. ***Render Tech***, 2006: 263-272.

[36] Veeraraghavan A, Raskar R, Agrawal A, et al. Dappled photography: Mask enhanced cameras for heterodyned light fields and coded aperture refocusing [J]. ***ACM Trans Gr***,

2007, 26: 69.

[37] Liang C K, Lin T H, Wong B Y, et al. Programmable aperture photography: Multiplexed light field acquisition[J]. ***ACM Trans Gr***, 2008, 27: 55:1−55:10.

[38] Fuchs M, Kachele M, Rusinkiewicz S. Design and fabrication of faceted mirror arrays for light field capture [J]. ***Comput Gr Forum***, 2013, 32: 246−257.

[39] Manakov A, Restrepo J F, Klehm O, et al. A reconfigurable camera add-on for high dynamic range, multispectral, polarization, and light-field imaging [J]. ***ACM Trans Gr***, 2013, 32: 1−47.

[40] Levoy M, Zhang Z, Mcdowall I. Recording and controlling the 4D light field in a microscope using microlens arrays[J]. ***J Microsc***, 2009, 235: 144−162.

[41] Ng R. Digital light field photography [D]. San Francisco: Standford University, 2006.

[42] Park J H, Hong K, Lee B. Recent progress in three-dimensional information processing based on integral imaging [J]. ***Appl Opt***, 2009, 48: H77−H94.

[43] Chen N, Park J H, Kim N. Parameter analysis of integral Fourier hologram and its resolution enhancement [J]. ***Opt Express***, 2010, 18: 2152−2167.

[44] Chen N, Yeom J, Jung J H, et al. Resolution comparison between integral-imaging-based hologram synthesis methods using rectangular and hexagonal lens arrays[J]. ***Opt Express***, 2011, 19: 26917−26927.

[45] Denisyuk Y N. On the reflection of optical properties of an object in a wave field of light scattered by it[J]. ***Dokl Akad Nauk, SSSR***, 1962, 144: 1275−1278.

[46] Leith E N, Upatnieks J. Wavefront reconstruction with continuous-tone objects[J]. ***J Opt Soc Am***, 1963, 53: 1377−1381.

[47] Hariharan P, Oreb B F, Eiju T. Digital phase-shifting interferometry: A simple error-compensating phase calculation algorithm[J]. ***Appl Opt***, 1987, 26: 2504−2506.

[48] Nugent K A. X−ray non-interferometric phase imaging: A unified picture[J]. ***J Opt Soc Am A***, 2007, 24: 536−547.

[49] Chen N, Ren Z, Li D, et al. Analysis of the noise in back-projection light field acquisition and its optimization[J]. ***Appl Opt***, 2017, 56: F20−F26.

[50] Goodman J W. Introduction to Fourier Optics [M]. 3rd ed. New Zealand: Roberts & Company, 2005.

[51] Park J H, Seo S W, Chen N, et al. Fourier hologram generation from multiple incoherent defocused images [C]// The Three-Dimensional Imaging, Visualization, and Display 2010 and Display Technologies and Applications for Defense, Security, and Avionics IV, 2010: 7690−7698.

[52] Park J H, Seo S W, Chen N, et al. Hologram synthesis from defocused images captured under incoherent illumination[C]// Proceedings of the Digital Holography and Three-Dimensional Imaging, 2010: 12−14.

[53] Levin A, Durand F. Linear view synthesis using a dimensionality gap light field prior [C]//Proceedings of the 2010 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 2010: 1831−1838.

[54] Marwah K, Wetzstein G, Bando Y, et al. Compressive light field photography using overcomplete dictionaries and optimized projections [J]. ***ACM Trans Gr***, 2013, 32, 46:1−46:12.

[55] Bailey S W, Echevarria J I, BodenheimerB, et al. Fast depth from defocus from focal stacks [J]. ***Vis Comput***, 2014, 31: 1697−1708.

[56] Kuthirummal S, Nagahara H, Zhou C, et al. Flexible depth of field photography [J]. ***IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell***, 2011, 33: 58−71.

[57] Zeng G L. One-angle fluorescence tomography with in-and-out motion[J]. ***J Electron Imaging***, 2013, 22: 043018.

[58] McMillan L, Bishop G. Plenoptic modeling: An image−based rendering system [C]//Proceedings of the 22nd Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, 1995: 39−46.

[59] Park J H, Lee S K, Jo N Y, et al. Light ray field capture using focal plane sweeping and its optical reconstruction using 3D displays[J]. ***Opt Express***, 2014, 22: 25444−25454.

[60] Mousnier A, Vural E, Guillemot C. Partial light field tomographic reconstruction from a fixed-camera focal stack [J]. ***Computer Science***, 2015, 22(8): 347−356.

[61] Wang H, Chen N, Zheng S, et al. Fast and high-resolution light field acquisition using defocus modulation[J]. ***Appl Opt***, 2018, 57: A250−A256.

[62] Wang H, Chen N, Liu J, et al. Light field imaging based on defocused photographic images [C]//Digital Holography and Three-Dimensional Imaging, 2017: W3A−3.

[63] Chen N, Ren Z, Lam E Y. High-resolution Fourier hologram synthesis from photographic images through computing the light field[J]. ***Appl Opt***, 2016, 55: 1751−1756.

[64] Liu J, Xu T, Yue W, et al. Light-field moment microscopy with noise reduction [J]. ***Opt Express***, 2015, 23: 29154−29162.

[65] Zhang Z, Levoy M. Wigner distributions and how they relate

to the light field [C]//Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Computational Photography (ICCP), 2009: 1-10.

[66] Liu C, Qiu J, Jiang M. Light field reconstruction from projection modeling of focal stack [J]. ***Opt Express***, 2017, 25: 11377-11388.

[67] Yin X, Wang G, Li W, et al. Iteratively reconstructing 4D light fields from focal stacks[J]. ***Appl Opt***, 2016, 55: 8457-8463.

[68] Jiang Z, Pan X, Liu C, et al. Light field moment imaging with the ptychographic iterative engine [J]. ***AIP Adv***, 2014, 4: 107108.

[69] Teague M R. Irradiance moments: their propagation and use for unique retrieval of phase [J]. ***J Opt Soc Am***, 1982, 72: 1199-1209.

[70] Falaggis K, Kozacki T, Kujawin′ska M, et al. Optimum plane selection criteria for single-beam phase retrieval techniques based on the contrast transfer function [J]. ***Opt Lett***, 2014, 39: 30-33.

[71] Martinez-Carranza J, Falaggis K, Kozacki T. Optimum measurement criteria for the axial derivative intensity used in transport of intensity-equation-based solvers [J]. ***Opt Lett***, 2014, 39: 182-185.

[72] Liu C, Qiu J, Zhao S. Iterative reconstruction of scene depth with fidelity based on light field data [J]. ***Appl Opt***, 2017, 56: 3185-3192.

[73] Zuo C, Chen Q, Qu W, et al. High-speed transport-of-intensity phase microscopy with an electrically tunable lens [J]. ***Opt Express***, 2013, 21: 24060-24075.

[74] Gerchberg R W, Saxton W O. A practical algorithm for the determination of the phase from image and diffraction plane pictures[J]. ***J Phys D Appl Phys***, 1972, 35: 237-246.

[75] Gureyev T E, Roberts A, Nugent K A. Partially coherent fields, the transport-of-intensity equation, and phase uniqueness[J]. ***J Opt Soc Am A***, 1995, 12: 1942-1946.

[76] Paganin D, Nugent K A. Noninterferometric phase imaging with partially coherent light [J]. ***Phys Rev Lett***, 1998, 80: 2586-2589.

[77] Yang G Z, Dong B Z, Gu B Y, et al. Gerchberg-Saxton and Yang-Gu algorithms for phase retrieval in a nonunitary transform system: A comparison [J]. ***Appl Opt***, 1994, 33: 209-218.

[78] Fienup J R. Reconstruction of an object from the modulus of its Fourier transform[J]. ***Opt Lett***, 1978, 3: 27-29.

[79] Cederquist J N, Fienup J R, Wackerman C C, et al. Wave-front phase estimation from Fourier intensity measurements [J]. ***J Opt Soc Am A***, 1989, 6: 1020-1026.

[80] Devaney A J, Chidlaw R. On the uniqueness question in the problem of phase retrieval from intensity measurements[J]. ***J Opt Soc Am***, 1978, 68: 1352-1354.

[81] Fienup J R. Reconstruction of a complex-valued object from the modulus of its Fourier transform using a support constraint[J]. ***J Opt Soc Am A***, 1987, 4: 118-123.

[82] Guo C, Liu S, Sheridan JT. Iterative phase retrieval algorithms I: optimization [J]. ***Appl Opt***, 2015, 54: 4698-4708.

[83] Rolleston R, George N. Image reconstruction from partial Fresnel zone information[J]. ***Appl Opt***, 1986, 25: 178-183.

[84] Misell D L. An examination of an iterative method for the solution of the phase problem in optics and electron optics: I. Test calculations[J]. ***J Phys D Appl Phys***, 1973, 6: 2200-2216.

[85] Fienup J R. Lensless coherent imaging by phase retrieval with an illumination pattern constraint [J]. ***Opt Express***, 2006, 14: 498-508.

[86] Guo C, Shen C, Li Q, et al. A fast-converging iterative method based on weighted feedback for multi-distance phase retrieval[J]. ***Sci Rep***, 2018, 8: 6436.

[87] Konijnenberg A, Coene W, Pereira S, et al. Combining ptychographical algorithms with the Hybrid Input-Output (HIO) algorithm[J]. ***Ultramicroscopy***, 2016, 171: 43-54.

[88] Lu X, Gao W, Zuo J M, et al. Atomic resolution tomography reconstruction of tilt series based on a GPU accelerated hybrid input-output algorithm using polar Fourier transform [J]. ***Ultramicroscopy***, 2015, 149: 64-73.

[89] Rolleston R, George N. Stationary phase approximations in Fresnel-zone magnitude-only reconstructions [J]. ***J Opt Soc Am A***, 1987, 4: 148-153.

[90] Dean B H, Bowers C W. Diversity selection for phase-diverse phase retrieval [J]. ***J Opt Soc Am A***, 2003, 20: 1490-1504.

[91] Mayo S C, Miller P R, Wilkins S W, et al. Quantitative X-ray projection microscopy: phase-contrast and multi-spectral imaging[J]. ***J Microsc***, 2002, 207: 79-96.

[92] Anand A, Pedrini G, Osten W, et al. Wavefront sensing with random amplitude mask and phase retrieval [J]. ***Opt Lett***, 2007, 32: 1584-1586.

[93] Almoro P F, Hanson S G. Random phase plate for wavefront sensing via phase retrieval and a volume speckle field [J]. ***Appl Opt***, 2008, 47: 2979-2987.

[94] Zhang F, Chen B, Morrison G R, et al. Phase retrieval by coherent modulation imaging[J]. ***Nat Commun***, 2016, 7:13367.

[95] Brady G R, Guizar-Sicairos M, Fienup J R. Optical wavefront measurement using phase retrieval with transverse translation diversity[J]. ***Opt Express***, 2009, 17: 624-639.

[96] Rodenburg J M, Faulkner H M L. A phase retrieval algorithm for shifting illumination[J]. ***Appl Phys Lett***, 2004, 85: 4795-4797.

[97] Pedrini G, Osten W, Zhang Y. Wave-front reconstruction from a sequence of interferograms recorded at different planes[J]. ***Opt Lett***, 2005, 30: 833-835.

[98] Chen N, Yeom J, Hong K, et al. Fast converging algorithm for wavefront reconstruction based on a sequence of diffracted intensity images [J]. ***J Opt Soc Korea***, 2014, 18: 217-224.

[99] Bao P, Zhang F, Pedrini G, et al. Phase retrieval using multiple illumination wavelengths [J]. ***Opt Lett***, 2008, 33: 309-311.

[100] Zhou A, Chen N, Wang H, et al. Analysis of Fourier ptychographic microscopy with half of the captured images [J]. ***J Opt***, 2018, 20: 095701.

[101] Zhou A, Wang W, Chen N, et al. Fast and robust misalignment correction of Fourier ptychographic microscopy for full field of view reconstruction [J]. ***Opt Express***, 2018, 26: 23661-23674.

[102] Gao P, Pedrini G, Osten W. Phase retrieval with resolution enhancement by using structured illumination [J]. ***Opt Lett***, 2013, 38: 5204-5207.

[103] Almoro P, Pedrini G, Osten W. Complete wavefront reconstruction using sequential intensity measurements of a volume speckle field[J]. ***Appl Opt***, 2006, 45: 8596-8605.

[104] Camacho L, Micó V, Zalevsky Z, et al. Quantitative phase microscopy using defocussing by means of a spatial light modulator[J]. ***Opt Express***, 2010, 18: 6755-6766.

[105] Agour M, Almoro P F, Falldorf C. Investigation of smooth wave fronts using SLM-based phase retrieval and a phase diffuser[J]. ***J Eur Opt Soc Rapid Publ***, 2012, 7: 12051.

[106] Almoro P F, Glückstad J, Hanson S G. Single-plane multiple speckle pattern phase retrieval using a deformable mirror[J]. ***Opt Express***, 2010, 18: 19304-19313.

[107] Roddier F, Roddier C, Roddier N. Curvature sensing: A new wavefront sensing method [C]//Proceedings of the 32nd Annual International Technical Symposium on Optical and Optoelectronic Applied Science and Engineering, 1988.

[108] Bajt S, Barty A, Nugent K, et al. Quantitative phase-sensitive imaging in a transmission electron microscope [J]. ***Ultramicroscopy***, 2000, 83: 67-73.

[109] Nugent K A. Coherent methods in the X-ray sciences[J]. ***Adv Phys***, 2010, 59: 1-99.

[110] Allman B, McMahon P, Nugent K, et al. Phase radiography with neutrons[J]. ***Nature***, 2000, 408: 158-159.

[111] Streibl N. Phase imaging by the transport equation of intensity[J]. ***Opt Commun***, 1984, 49: 6-10.

[112] Barty A, Nugent K A, Paganin D, et al. Quantitative optical phase microscopy[J]. ***Opt Lett***, 1998, 23: 817-819.

[113] Kou S S, Waller L, Barbastathis G, et al. Quantitative phase restoration by direct inversion using the optical transfer function[J]. ***Opt Lett***, 2011, 36: 2671-2673.

[114] Zuo C, Chen Q, Qu W, et al. Noninterferometric single-shot quantitative phase microscopy[J]. ***Opt Lett***, 2013, 38: 3538-3541.

[115] Zuo C, Chen Q, Asundi A. Light field moment imaging: Comment[J]. ***Opt Lett***, 2014, 39: 654.

[116] Woods S C, Greenaway A H. Wave-front sensing by use of a Green′s function solution to the intensity transport equation [J]. ***J Opt Soc Am A***, 2003, 20: 508-512.

[117] Allen L, Oxley M. Phase retrieval from series of images obtained by defocus variation [J]. ***Opt Commun***, 2001, 199: 65-75.

[118] Pinhasi S V, Alimi R, Perelmutter L, et al. Topography retrieval using different solutions of the transport intensity equation[J]. ***J Opt Soc Am A***, 2010, 27: 2285-2292.

[119] Gureyev T E, Roberts A, Nugent K A. Phase retrieval with the transport-of-intensity equation: Matrix solution with use of Zernike polynomials [J]. ***J Opt Soc Am A***, 1995, 12: 1932-1941.

[120] Gureyev T E, Nugent K A. Phase retrieval with the transport-of-intensity equation. II. Orthogonal series solution for nonuniform illumination [J]. ***J Opt Soc Am A***, 1996, 13: 1670-1682.

[121] Gureyev T E, Nugent K A. Rapid quantitative phase imaging using the transport of intensity equation [J]. ***Opt Commun***, 1997, 133: 339-346.

[122] Zuo C, Chen Q, Asundi A. Boundary-artifact-free phase retrieval with the transport of intensity equation: fast solution with use of discrete cosine transform[J]. ***Opt Express***, 2014, 22: 9220-9244.

[123] Zuo C, Chen Q, Li H, et al. Boundary-artifact-free phase retrieval with the transport of intensity equation II: Applications to microlens characterization [J]. ***Opt Express***,

2014, 22: 18310-18324.

[124] Huang L, Zuo C, Idir M, et al. Phase retrieval with the transport-of-intensity equation in an arbitrarily shaped aperture by iterative discrete cosine transforms [J]. ***Opt Lett***, 2015, 40: 1976-1979.

[125] Volkov V, Zhu Y, Graef M D. A new symmetrized solution for phase retrieval using the transport of intensity equation [J]. ***Micron***, 2002, 33: 411-416.

[126] Martinez-Carranza J, Falaggis K, Kozacki T, et al. Effect of imposed boundary conditions on the accuracy of transport of intensity equation-based solvers [C]//Proceedings of the Modeling Aspects in Optical Metrology IV, 2013: 87890N.

[127] Frank J, Altmeyer S, Wernicke G. Non-interferometric, non-iterative phase retrieval by Green′s functions [J]. ***J Opt Soc Am A***, 2010, 27: 2244-2251.

[128] Ishizuka A, Mitsuishi K, Ishizuka K. Direct observation of curvature of the wave surface in transmission electron microscope using transport intensity equation [J]. ***Ultramicroscopy***, 2018, 194: 7-14.

[129] Ishizuka A, Ishizuka K, Mitsuishi K. Boundary-artifact-free observation of magnetic materials using the transport of intensity equation[J]. ***Microsc Microanal***, 2018, 24: 924-925.

[130] Schmalz J A, Gureyev T E, Paganin D M, et al. Phase retrieval using radiation and matter-wave fields: Validity of Teague′s method for solution of the transport-of-intensity equation[J]. ***Phys Rev A***, 2011, 84: 023808.

[131] Zuo C, Chen Q, Huang L, et al. Phase discrepancy analysis and compensation for fast Fourier transform based solution of the transport of intensity equation[J]. ***Opt Express***, 2014, 22: 17172-17186.

[132] Ferrari J A, Ayubi G A, Flores J L, et al. Transport of intensity equation: Validity limits of the usually accepted solution[J]. ***Opt Commun***, 2014, 318: 133-136.

[133] Zuo C, Chen Q, Yu Y, et al. Transport-of-intensity phase imaging using Savitzky-Golay differentiation filter-theory and applications[J]. ***Opt Express***, 2013, 21: 5346-5362.

[134] Waller L, Tian L, Barbastathis G. Transport of intensity phase-amplitude imaging with higher order intensity derivatives[J]. ***Opt Express***, 2010, 18: 12552-12561.

[135] Paganin D, Barty A, McMahon P J, et al. Quantitative phase-amplitude microscopy. III. The effects of noise [J]. ***J Microsc***, 2004, 214: 51-61.

[136] Martin A, Chen F R, Hsieh W K, et al. Spatial incoherence in phase retrieval based on focus variation [J]. ***Ultramicroscopy***, 2006, 106: 914-924.

[137] Ishizuka K, Allman B. Phase measurement of atomic resolution image using transport of intensity equation [J]. ***Microscopy***, 2005, 54: 191-197.

[138] Soto M, Acosta E. Improved phase imaging from intensity measurements in multiple planes [J]. ***Appl Opt***, 2007, 46: 7978-7981.

[139] Cong W, Wang G. Higher-order phase shift reconstruction approach: Higher-order phase shift reconstruction approach [J]. ***Med Phys***, 2010, 37: 5238-5242.

[140] Bie R, Yuan X H, Zhao M,et al. Method for estimating the axial intensity derivative in the TIE with higher order intensity derivatives and noise suppression [J]. ***Opt Express***, 2012, 20: 8186-8191.

[141] Gureyev T, Pogany A, Paganin D, et al. Linear algorithms for phase retrieval in the Fresnel region [J]. ***Opt Commun***, 2004, 231: 53-70.

[142] Martinez-Carranza J, Falaggis K, Kozacki T. Multi-filter transport of intensity equation solver with equalized noise sensitivity[J]. ***Opt Express***, 2015, 23: 23092-23107.

[143] Sun J, Zuo C, Chen Q. Iterative optimum frequency combination method for high efficiency phase imaging of absorptive objects based on phase transfer function [J]. ***Opt Express***, 2015, 23: 28031-28049.

[144] Jenkins M H, Long J M, Gaylord T K. Multifilter phase imaging with partially coherent light[J]. ***Appl Opt***, 2014, 53: D29-D39.

[145] Zhong J, Claus R A, Dauwels J, et al. Transport of intensity phase imaging by intensity spectrum fitting of exponentially spaced defocus planes[J]. ***Opt Express***, 2014, 22: 10661-10674.

[146] Xue B, Zheng S, Cui L, et al. Transport of intensity phase imaging from multiple intensities measured in unequally-spaced planes[J]. ***Opt Express***, 2011, 19: 20244-20250.

[147] Zheng S, Xue B, Xue W, et al. Transport of intensity phase imaging from multiple noisy intensities measured in unequally-spaced planes[J]. ***Opt Express***, 2012, 20: 972-985.

[148] Savitzky A, Golay M J E. Smoothing and differentiation of data by dimplified least squares procedures [J]. ***Anal Chem***, 1964, 36: 1627-1639.

[149] Gorry P A. General least-squares smoothing and differentiation of nonuniformly spaced data by the convolution method [J]. ***Anal Chem***, 1991, 63: 534-536.

[150] Luo J, Ying K, He P, et al. Properties of Savitzky-Golay digital differentiators [J]. ***Dig Signal Process***, 2005, 15: 122-136.

[151] Zuo C, Sun J, Zhang J, et al. Lensless phase microscopy

and diffraction tomography with multi-angle and multi-wavelength illuminations using a LED matrix [J]. ***Opt Express***, 2015, 23: 14314-14328.

[152] Waller L, Kou S S, Sheppard C J R, et al. Phase from chromatic aberrations [J]. ***Opt Express***, 2010, 18: 22817-22825.

[153] Nguyen T, Nehmetallah G, Tran D, et al. Fully automated, high speed, tomographic phase object reconstruction using the transport of intensity equation in transmission and reflection configurations [J]. ***Appl Opt***, 2015, 54: 10443-10453.

[154] Almoro P F, Waller L, Agour M, et al. Enhanced deterministic phase retrieval using a partially developed speckle field [J]. ***Opt Lett***, 2012, 37: 2088-2090.

[155] Gorthi S S, Schonbrun E. Phase imaging flow cytometry using a focus-stack collecting microscope [J]. ***Opt Lett***, 2012, 37: 707-709.

[156] Zuo C, Sun J, Li J, et al. High-resolution transport-of-intensity quantitative phase microscopy with annular illumination[J]. ***Sci Rep***, 2017, 7: 7654.

[157] Li J, Chen Q, Zhang J, et al. Efficient quantitative phase microscopy using programmable annular LED illumination[J]. ***Biomed Opt Express***, 2017, 8: 4687-4705.

[158] Chakraborty T, Petruccelli J C. Source diversity for transport of intensity phase imaging[J]. ***Opt Express***, 2017, 25: 9122-9137.

[159] Chakraborty T, Petruccelli J C. Optical convolution for quantitative phase retrieval using the transport of intensity equation[J]. ***Appl Opt***, 2018, 57: A134-A141.

[160] Shaked N T, Katz B, Rosen J. Review of three-dimensional holographic imaging by multiple-viewpoint projection-based methods[J]. ***Appl Opt***, 2009, 48: H120-H136.

[161] McCrickerd J T, George N. Holographic stereogram from sequential component photographs [J]. ***Appl Phys Lett***, 1968, 12: 10-12.

[162] Benton S A. Survey of holographic stereograms [C]// Proceedings of the Processing and Display of Three-Dimensional Data, 1983.

[163] Tian L, Waller L. 3D intensity and phase imaging from light field measurements in an LED array microscope [J]. ***Optica***, 2015, 2: 104-111.

[164] Adelson E H, Bergen J R. The Plenoptic Function and the Elements of Early Vision[M]. Cambridge: MIT Press, 1991: 3-20.

[165] Gureyev T E, Paganin D M, Stevenson A W, et al. Generalized Eikonal of partially coherent beams and its use in quantitative imaging[J]. ***Phys Rev Lett***, 2004, 93: 068103.

[166] Bastiaans M J. Application of the Wigner distribution function to partially coherent light [J]. ***J Opt Soc Am A***, 1986, 3: 1227-1238.

[167] Walther A. Radiometry and coherence [J]. ***J Opt Soc Am***, 1968, 58: 1256-1259.

[168] Zuo C, Chen Q, Tian L, et al. Transport of intensity phase retrieval and computational imaging for partially coherent fields: The phase space perspective [J]. ***Opt Lasers Eng***, 2015, 71: 20-32.

[169] Boashash B. Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal. I. Fundamentals[J]. ***Proc IEEE***, 1992, 80: 520-538.

[170] Bastiaans M J. The Wigner distribution function applied to optical signals and systems[J]. ***Opt Commun***, 1978, 25: 26-30.

[171] Petruccelli J C, Tian L, Barbastathis G. The transport of intensity equation for optical path length recovery using partially coherent illumination [J]. ***Opt Express***, 2013, 21: 14430-14441.

[172] Dragoman D. Phase-space interferences as the source of negative values of the Wigner distribution function[J]. ***J Opt Soc Am A***, 2000, 17: 2481-2485.

[173] Bastiaans M J. Uncertainty principle for partially coherent light[J]. ***J Opt Soc Am***, 1983, 73: 251-255.

[174] Paganin D, Gureyev T E, Mayo S C, et al. X-ray omni microscopy[J]. ***J Microsc***, 2004, 214: 315-327.

[175] Li J, Chen Q, Sun J, et al. Multimodal computational microscopy based on transport of intensity equation [J]. ***J Biomed Opt***, 2016, 21: 126003.

[176] Friberg A T. On the existence of a radiance function for finite planar sources of arbitrary states of coherence [J]. ***J Opt Soc Am***, 1979, 69: 192-198.

[177] Oh S B, Kashyap S, Garg R, et al. Rendering wave effects with augmented light field[J]. ***Comput Gr Forum***, 2010, 29: 507-516.

[178] Schwiegerling J.Wavefront Sensing: Shack-Hartmann sensing [J]. ***J Refract Surg***, 2001, 17: 573-577.

[179] Waller L. Phase imaging with partially coherent light [C]// Proceedings of the Three-dimensional and multidimensional microscopy: Image acquisition and processing XX, 2013.

[180] Iaconis C, Walmsley I A. Direct measurement of the two-point field correlation function[J]. ***Opt Lett***, 1996, 21: 1783-1785.

[181] Marks D L, Stack R A, Brady D J. Three-dimensional coherence imaging in the Fresnel domain [J]. ***Appl Opt***, 1999, 38: 1332-1342.

[182] Nugent K A. Wave field determination using three-dimensional intensity information [J]. ***Phys Rev Lett***, 1992, 68: 2261-2264.

[183] Raymer M G, Beck M, McAlister D. Complex wave-field reconstruction using phase-space tomography [J]. ***Phys Rev Lett***, 1994, 72: 1137-1140.

[184] Rydberg C, Bengtsson J. Numerical algorithm for the retrieval of spatial coherence properties of partially coherent beams from transverse intensity measurements [J]. ***Opt Express***, 2007, 15: 13613-13623.

[185] Zhang Z, Chen Z, Rehman S, et al. Factored form descent: A practical algorithm for coherence retrieval[J]. ***Opt Express***, 2013, 21: 5759.

[186] Tian L, Zhang Z, Petruccelli J C, et al. Wigner function measurement using a lenslet array [J]. ***Opt Express***, 2013, 21: 10511-10525.

[187] Waller L, Situ G, Fleischer J W. Phase-space measurement and coherence synthesis of optical beams [J]. ***Nat Photonics***, 2012, 6: 474-479.

[188] Allen L J, Faulkner H M L, Nugent K A, et al. Phase retrieval from images in the presence of first-order vortices [J]. ***Phys Rev E***, 2001, 63: 037602.

[189] Lubk A, Guzzinati G, Börrnert F, et al. Transport of intensity phase retrieval of arbitrary wave fields including vortices[J]. ***Phys Rev Lett***, 2013, 111: 173902.